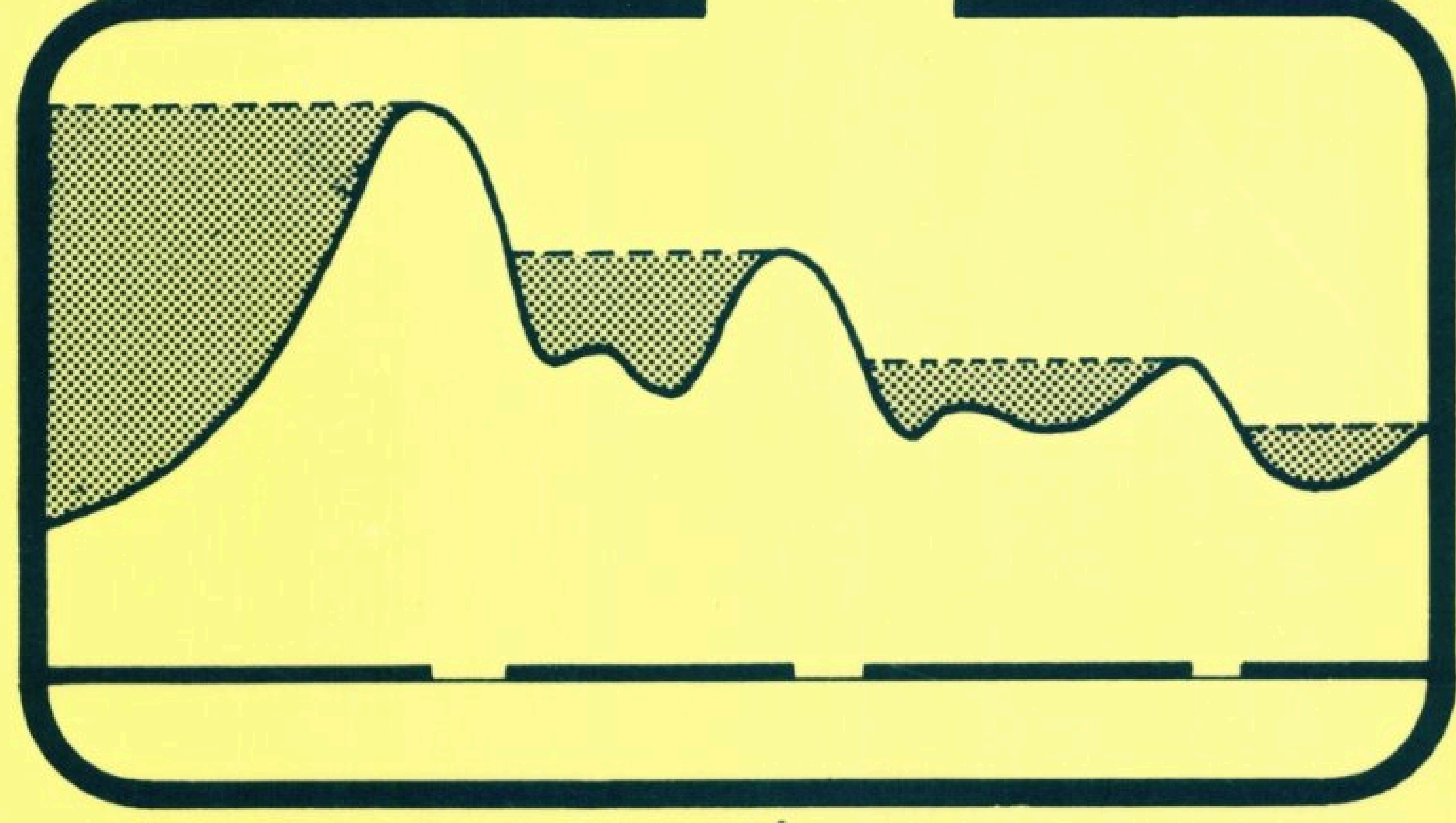
المدخل إلى الدوال الحقيقية





تأليف

رالف بواس

ترجمة

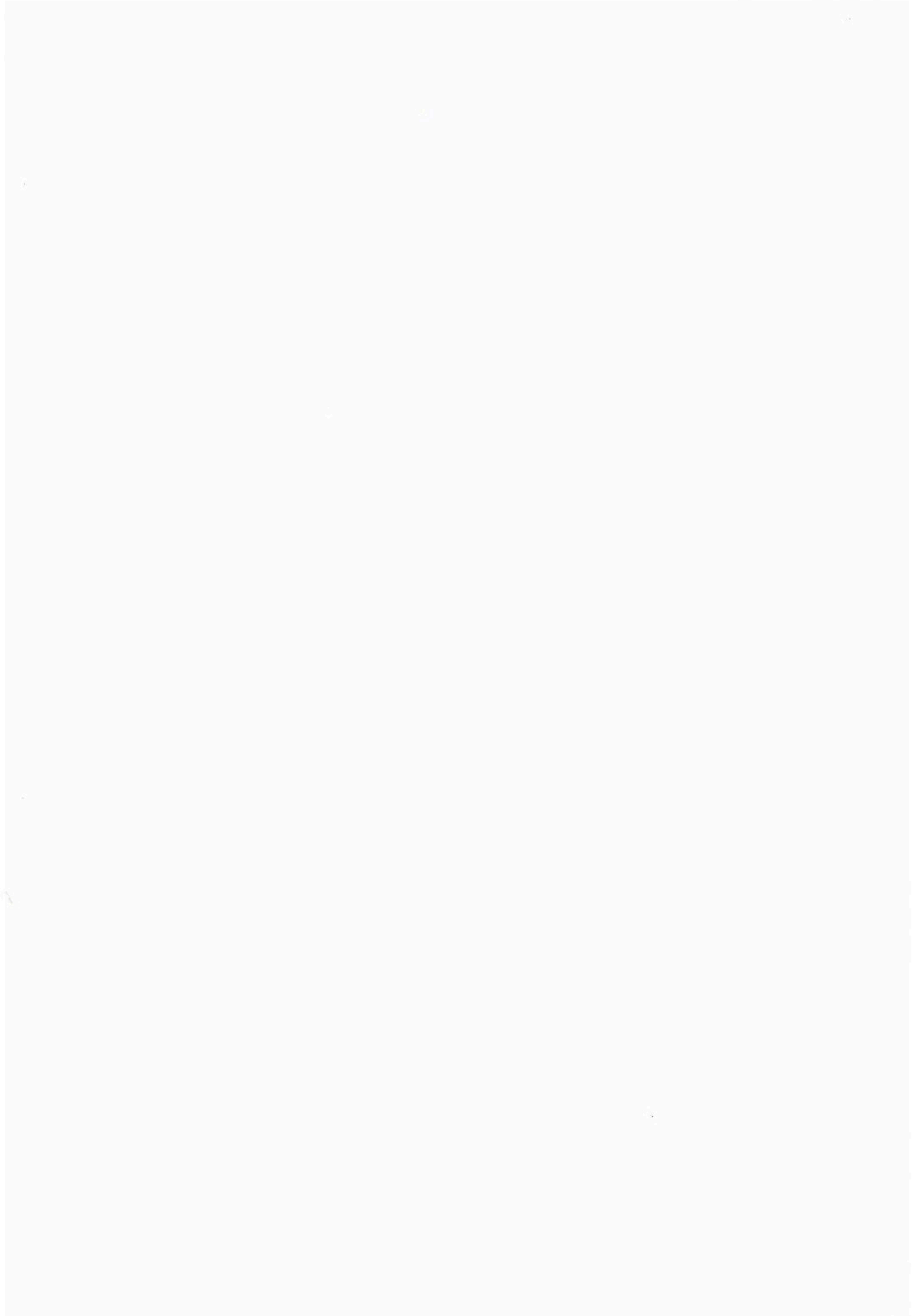
الدكتور عبدالله بن محمد الراشد — الدكتور صالح بن عبدالرحمن القويز

١٤٠٧هـ

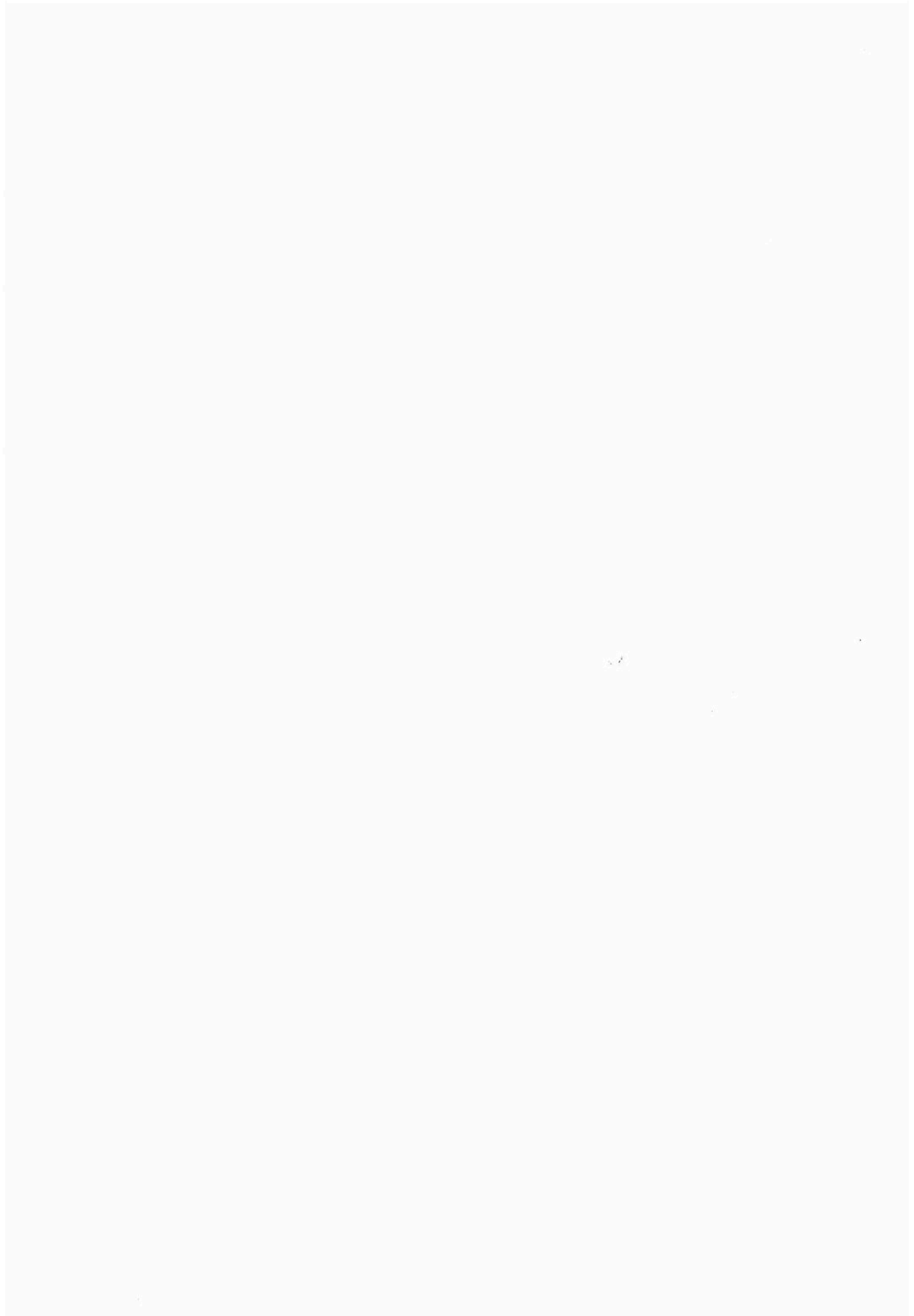


الناشر: عمادة شؤون المكتبات ـ جامعة الملك سعود ـ الرياض

١٩٨٧م







المدخل إلى الدوال الحقيقة

تأليف

رالف بواس

أستاذ الرياضيات ـ بجامعة نورث وسترن

ترجمة

الدكتور عبدالله محمد الراشد

قسم الرياضيات ـ كلية العلوم

جامعة الملك سعود

الرياض ـ المملكة العربية السعودية

الدكتور صالح عبدالرحمن القويز

قسم العلوم الرياضية ـ كلية العلوم

جامعة البترول والمعادن

الظهران ـ المملكة العربية السعودية

الناشر: عمادة شؤون المكتبات - جامعة الملك سعود

ص.ب ٢٢٤٨٠ - الرياض - ١١٤٩٥ - المملكة العربية السعودية

الطبعة الأولى ١٤٠٧هـ (١٩٨٧م).
(عن الطبعة الإنجليزية الثانية الصادرة في عام ١٩٧٢م)

٥١٧

ب ر م بواس، رالف

المدخل إلى الدوال الحقيقية / تأليف رالف بواس

ترجمة عبدالله محمد الراشد، صالح عبدالرحمن القويز

١ ـ التفاضل والتكامل ٢ ـ الرياضيات

ا ـ الراشد، عبدالله محمد ب ـ القويز، صالح عبدالرحمن

جـ ـ العنوان

– A Primer of Real Functions –
"Second edition 1972"

By Ralph Boas

Published by:
"The Mathematical Association of America"



مطابع جامعة الملك سعود ـ ١٤٠٧هـ

صف الحروف من قبل شركة بيكاسه انتركونتننتال، هولندة

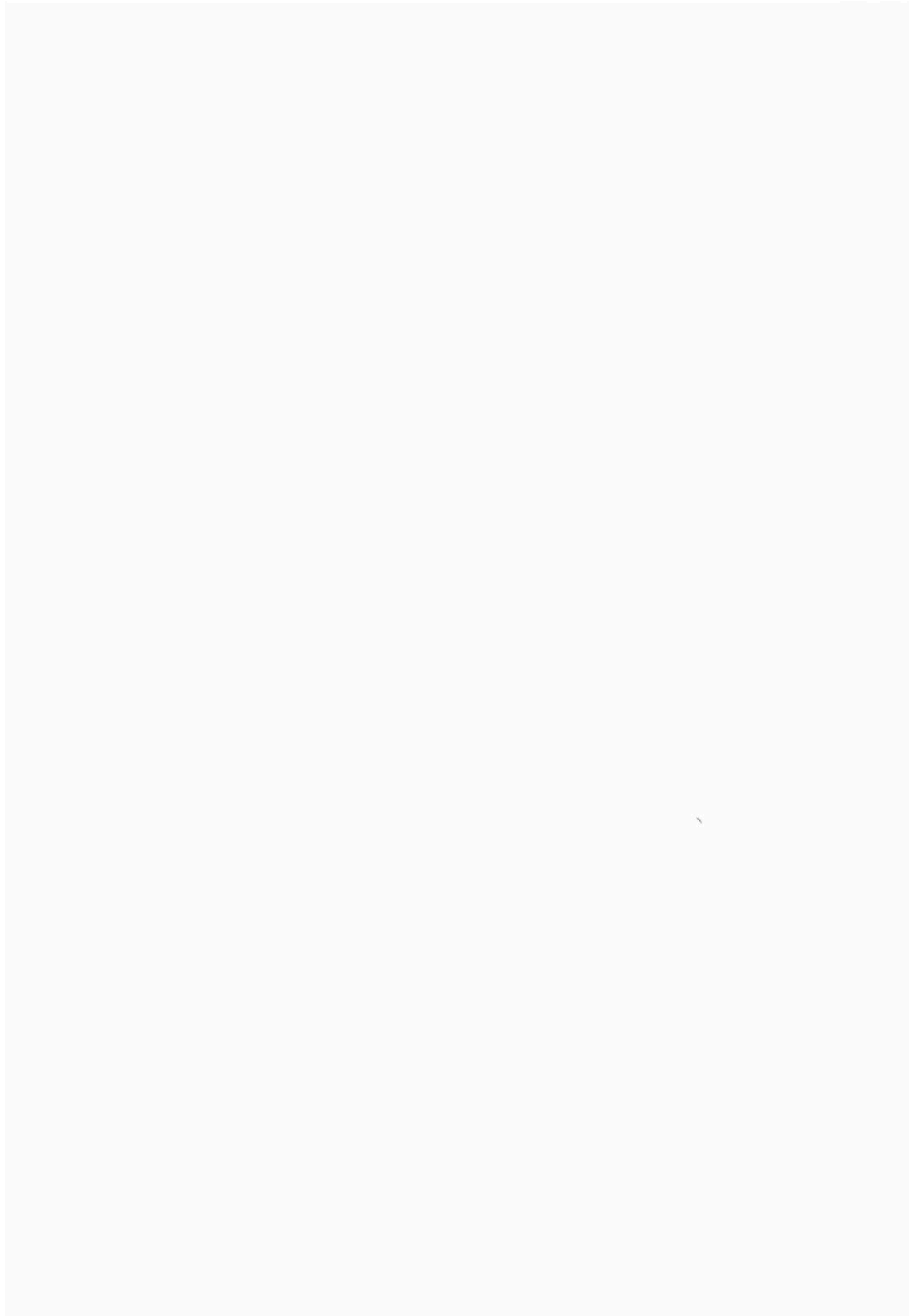
مقدمة الترجمـة

انطلاقا من إيماننا العميق بوجوب إثراء المكتبة العربية، خصوصاً قسمها العلمي، بكل ماهو مفيد، فلقد قمنا بترجمة هذا الكتاب المتعلق بالبنية الأساسية في الدوال الحقيقية راجين أن نكون قد وفقنا ولو بعض الشيء، لما نصبوا إليه.

وتجدر الإشارة إلى أنه من مميزات هذا الكتاب، صيغته الوصفية السلسة التي حاولناجهدا إبقاءها أثناء الترجمة. كذلك لقد تميز عن غيره من الكتب التي في مستواه بخروجه عن الأسلوب المعتاد في عرض الماده حيث حاول المؤلف إعطاء أغلب المفاهيم المعروضة تصوراً هندسياً مما سهل مهمة القارىء بالإضافة إلى إعطائه بعض التطبيقات المناسبة، كلما سنحت الفرصه، مما أضفى على الكتاب طابعاً وبُعداً مميزاً.

ربيع أول ١٤٠٤ هـ

المترجمـان



مقدمة المؤلــف

١ - إلى المبتــدىء: في هذا الكتيب قدمت بعض المفاهيم والـطرق المتعلقـة بالمتغيرات الحقيقية، واستخدمنا هذه المفاهيم في الحصول على بعض النتائج الشيقة. لم يكن الهدف إعطاء كل ماهو معروف عن هذا الموضوع وبأعم صورة ممكنة. الهدف هو التعمق المعقول في بعض المواضيع بأقل قدر ممكن من المصطلحات الخاصة. آمل أن أكون قد نجحت في المحافظة على جاذبية الموضوع التي كانت مرافقة له في أيامه الأولى وفقدناها إلى حد كبير الآن. أرجو أن يساعد هذا الكتاب القارىء على مواصلة القراءة في أمهات الكتب المتوفرة بشكل جيد.

لايحتاج المرء لقراءة هذا الكتاب على أكثر من مبادىء حساب التفاضل والتكامل. على العموم، قدمت المفاهيم بصورة مفصلة وبعمق تدريجي ومن يجد صعوبة في متابعتها بإمكانه الانتقال إلى الجزء التالي.

بما أن هذا ليس له صبغة الكتب المقررة وإنما هو على شاكلة محاضرات عامة فلم أحاول على الدوام المحافظة على التوازن بين البراهين المفصلة والمناقشة العامة، أو على الترتيب المنطقي للمادة المعروضة.

جميع العبارات مثل «من الواضح»، «من السهل» وخلافها تعني أنه يفترض أن تكون الجملة المعنية جلية وبإمكان القارىء أن يبرهن صحتها ونحن ندعو لذلك. ومن جهة أخرى، فالعبارة «من الممكن إثبات . .» تعني إما صعوبة البرهان أو أنه

يعتمـد على مفاهيم لم نتطرق لها هنا. وبالتالي فمن المستحسن ألا يحاول القارىء إعطاء البرهان بنفسه.

عند كتابة التعاريف استخدمت «إذا» حيث من المفروض استعمال «إذا وإذا فقط». على سبيل المثال إذا كانت المجموعة محدودة من أسفل ومن أعلى فإنها تسمى محدودة. يجب أن يفهم هذا التعريف على إنه يتضمن العبارة الإضافية «وإذا لم تكن محدودة من أعلى ومن أسفل فإنها لاتسمى محدودة».

يحتوى الكتاب على العديد من التمارين بعضها لتوضيح المادة والبعض الآخر جزء أساسي من الكتاب. التمرين الذى يرد ذكره كمنطوق لفرضية يجب تفسيره على أنه طلب لإثباتها. حلول جميع التمارين معطاة في نهاية الكتاب.

المقاطع المكتوبة بخط صغير تعني إما مواد إضافية أو أسئلة صعبة.

أعتـذر مقـدمـاً عن أى خطأ يلاحظه القارىء النبيه. لم أقصد أياً من هذه الأخطاء ولكن العثور عليها وتصحيحها يمثل تمريناً جيداً للقارىء.

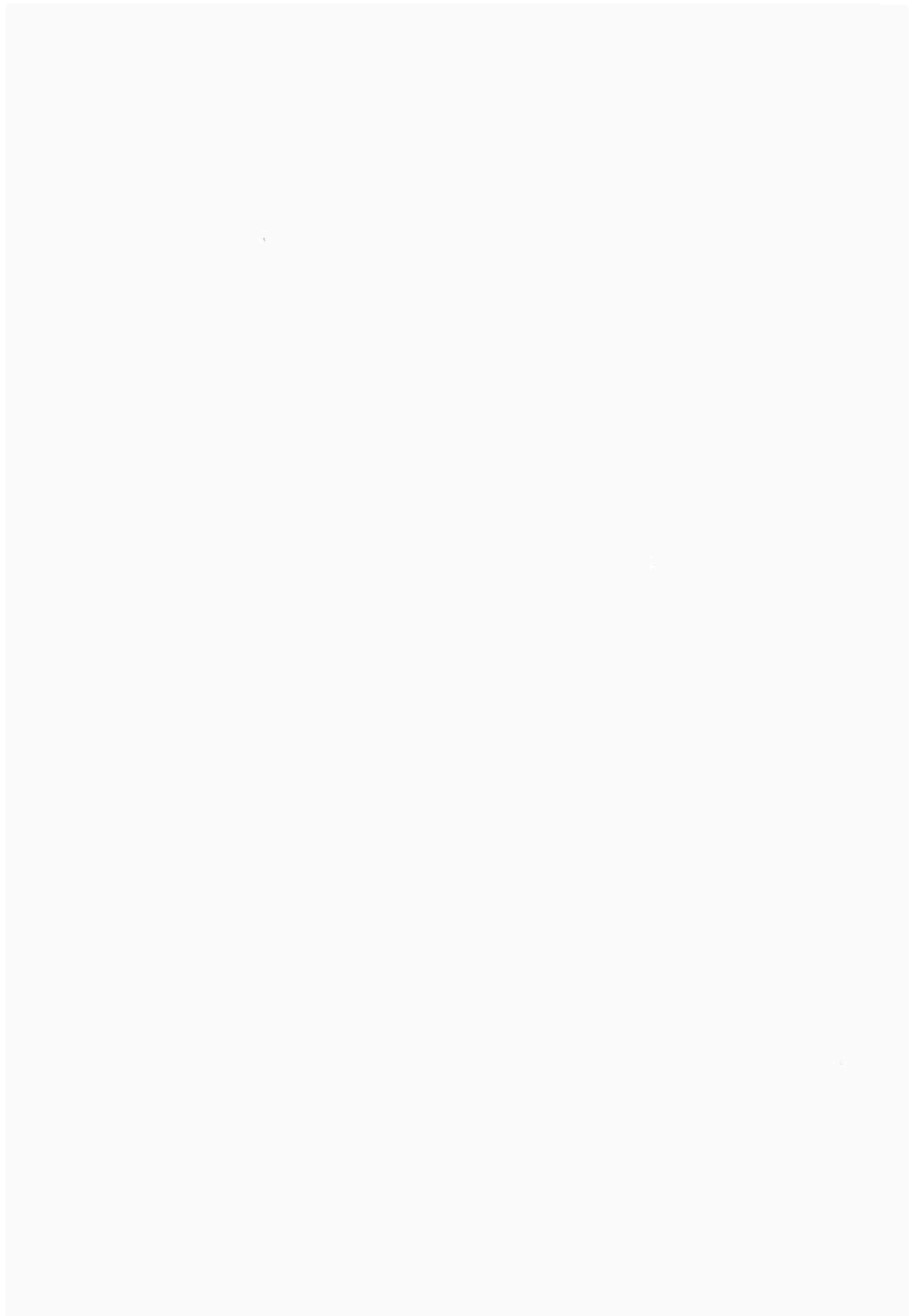
٢ - **إلى المتخصص**: الكتاب غير مقصود للمتخصصين على الإطلاق، حيث إن هذه الجملة ستؤخذ كدعوة لقراءته، فسوف أوضح ماحاولت أن أعمله ومالم أحاول. لقد حاولت إعطاء القارىء الذي ليس لديه خلفية مسبقة عن الموضوع بعض النتائج التي أراها شيقة. لتحقيق هذا عرضت المادة الضرورية لتقديم هذه النتائج بالإضافة إلى بعض المواد المناسبة وغير الصعبة، بما أن الكتاب غير شامل لم أحاول تقديم أي مفهوم أو أي رمز مهما كان مهمًا أو مناسباً إذا لم تدع الحاجة إليه. لقد حذفت موضوع التكـامـل علي مضض لكثرة مايحتاجه من التفاصيل قبل التمكن من الوصول إلي النتائج المرغوبة.

بما أن الكتاب ليس له صبغة الكتاب المقرر لم يكتب بالطريقة المعتادة بالإضافة إلى أن الأسـلوب مطول وقـد استـعـمـلنـا بديهـية الاخـتيار (Axian of choice) عدة مرات بدون ذكرها حيث إن هذا ليس مكاناً لمناقشة الأسئلة الفلسفية، وعلى كل حال ففي ضوء نتـائـج جودل (Godel) فإن افتراض بديهية الاختيار لن يسبب أي إشكـال أكثـر مما سببتـه. ومن جهـة أخـرى وحسب عمـل كوهـين الحـديث، فبافتراض بديهية الاختيار بدلاً من نقيضها فإننا نختار نوعاً من الرياضيات بدلاً من

النـوع الآخـر، مثـلاً رياضيات زرميلو بدلاً من خلافها . من هذا الاتجاه لاداعي لاجتناب بديهية الاختيار متى كان من الطبيعي استعمالها حتى في الحالات التي يعرف إمكانية تجنبها .

٣ - يعرب المؤلف عن شكره الجزيل لكل من ساهم في مراجعة وتصحيح هذا الكتاب .

رالف بـــــواس



المحتويـــات

الفصل الأول: المجموعـــات

الصفحة

الفصل الثاني : الدوال

الصفحة

الفصل الأول

المجموعـــات

١ - المجموعـــــات

لكي نتمكن من قراءة أي شيء حول هذا المـوضـوع، يجب علينـا أن نتعلم لغـة المجموعات. سنحاول جعل عدد المصطلحات العلمية أقل مايمكن ولكن هناك حداً أدنى من الضروري تعلمه. معظم هذه المصطلحات كلمات عادية أعطيت معاني خاصة، هذه الطريقة لها محاسن ومساويء، وعلى كل حال علينا أن نقبل بها لأننا لانستـطيع الآن تغيير اللغـة بكـاملهـا. معـظم المصـطلحات مستمدة من نظرية المجموعات وهذا موضوع لايهمنا في حد ذاته. في الحقيقة، نظرية المجموعات فرع مستقل من الرياضيات. في هذا الفرع نجد المفاهيم الأساسية غير المعرفة والخاضعة لمسلمات عديدة، أحد هذه المفاهيم غير المعرفة مفهوم «المجموعات» نفسه.

من وجهة النظر البديهية، نستطيع أن نتصور المجموعة على أنها مجموعة أشياء، تسمى عناصرها، أو أعضاؤ ها أو نقاطها. نقول إن المجموعة تحوي عناصرها أو أن العناصر تنتمي إلى المجموعة، أو ببساطة أنها من المجموعة. الاستعمال العادي لمفهوم المجمـوعـة كما في «مجموعة من الأطباق» أو «مجموعة أعمال بورباكي» (Bourbaki) قريب مما يجب أن نعرفه عن مفهوم المجموعة، إلا أن الجملة الثانية قد توحي بشيء من ترتيب العنـاصر وهذا لاعلاقة له بالمفهوم الرياضي للمجموعة. نستطيع أن نكون مجمـوعات من نقاط هندسية عادية، أو من دوال أو حتى من مجموعات أخرى. سوف نستخـدم الكلمات مثل فئة وتجمع كمرادفات لكلمة مجموعة، فمثلاً نقول فئة من

تجمعات من المجموعات بدلاً من مجموعة من مجموعات من مجموعات.

إذا كانت E مجموعة، فإن H تسمى مجموعة جزئية من E إذا كان كل عنصر من H عنصراً من E أيضاً. فمثلاً، إذا كانت E المجموعة التي عناصرها الأعداد 3, 2, 1 فإنه يوجد ثمان مجموعات جزئية من E . ثلاث منها تحوى أحد العناصر، ثلاث مجموعات تحوى أى عنصرين، مجموعة E نفسها (المجموعة الجزئية قد لاتكون أصغر من المجموعة الأصلية) والمجموعة الجزئية الثامنة حسب الاصطلاح هي المجموعة الخالية، وهذه تمثل المجموعة التي لايوجد بها أي عنصر. إذا كانت H مجموعة جزئية من E فإننا نكتب $H \subset E$ أو $E \supset H$ ، وأحياناً نقول إن E تحوي H أو أن E تغطي H . إذا كانت H مجموعة جزئية من E ولاتساوي E ، نقول إن H مجموعة جزئية فعلية من E .

إذا كانت X عنصراً من E فإننا نكتب $X \in E$. في الغالب، نقول إن X من E ، أو إن X تنتمي إلي E أو إن E تحوي X وجميعها تعني الشيء نفسه. بما أن عناصر المجموعات تختلف عن المجموعات نفسها، فعلينا أن نميز بين العنصر X والمجموعة المكونة من العنصر X وحده. في العادة، نرمز للمجموعة الأخيرة بالرمز (X) . الرموز $X \in E$ و $(X) \subset E$ تعني نفس الشيء.

الفضاء مجموعة شاملة، بمعني أننا نأخذ جميع مجموعاتنا منها. إذا كان الفضاء Ω و $E \subset \Omega$ ، فإن مكملة E (بالنسبه لـ Ω) هي المجموعة المكونة من جميع عناصر Ω والتي لاتنتمي للمجموعة E . نرمز لمكملة E بالرمز ((C(E)) . فمثلاً، إذا كانت Ω تمثل حروف الأبجدية في اللغه الإنجليزية أو E الحروف الساكنة في اللغة الإنجليزية فإن ((C(E)) تتكون من حروف العلة. أما إذا كانت E تتكون من الحرف a فإن C(E) يصبح مجموعة الحروف b, c, ..., z . إذا كانت E تشمل جميع حروف الأبجدية، فإن C(E) هي المجموعة الخالية. إذا كانت E خالية، فإن $C(E) = \Omega$.

تمريـن (١-١)

اثبت أن $C(C(E)) = E$.

أحيانا نضطر إلي حساب مكملات مجموعة معينة بالنسبة إلى فضاءات مختلفة، في هذه الحالات نستعمل رموزاً خاصة.

إذا كانت F, E مجموعتين، فإننا نستطيع أن نكون منهما مجموعتين أخريتين، وحيث إن هذا يحدث باستمرار فإنه يوجد مسميات خاصة لهاتين المجموعتين. المجموعة الأولى هي اتحاد المجموعتين وتكتب $E \cup F$ (أحيانا نسميها المجموع ونكتبها $E + F$)؛ وتتكون من جميع عناصر E و F (العناصر الموجودة في المجموعتين؛ العنصر المشترك بين المجموعتين يحسب مرة واحدة فقط). المجموعة الثانية هي تقاطع المجموعتين وتكتب $E \cap F$ (أحيانا تسمي الضرب وتكتب $E . F$ أو EF)؛ وتتكون هذه المجموعة من جميع العناصر المشتركه بين F, E . إذا كانت $E \cap F$ خالية فإننا نقول إن F, E منفصلتان، أي أن F, E منفصلتان إذا لم يوجد عناصر مشتركه بينهما.

تمريـن (١-٢)

إذا كانت Ω أحرف الهجاء و E تتكون من الأحرف الساكنة، F مجموعة الحروف التي تظهر في الجملة Real functions (الحرف n يحسب مرة واحدة). برهن أن :

(أ) $E \cup F = \Omega$ ؛ (ب) $F \supset C(E)$ ؛ (جـ) $C(F) \subset E$

(د) $C(E)$ و $F \cap E$ منفصلتان.

هنـاك العـديد من الصعـوبـات المنـطقية التي تظهـر إذا استعملنـا نظرية المجموعات بدون قيود، وقد أدت هذه الصعوبات إلى الكثير من الجدل والنقاش. لحسن الحظ لاتظهر هذه الصعوبات إلاَّ في مراحل تجريدية متقدمة لانحتاجها في هذا الكتاب ومجالات مصطنعة إلى حد ما وعليه فإننا نستطيع أن نتجاهل هذه الصعوبات من بقية هذا الكتـاب. بعض الجمل التي يظهر أنها تعرف مجموعات لاتعرفها من الحقيقة، مثلها مثل أن بعض مجموعات الحروف الهجائية لا تمثل كلمات حقيقية (مثل Frong). فمثـلا، مع أننـا نستـطيع الحـديث عن مجمـوعات عناصرها هي أيضاً

مجموعات، إلاَّ أننا لا نستطيع الحديث عن مجموعة جميع المجموعات. لنفرض أننا نستـطيع، إذاً مجمـوعة جميع المجموعات ستحوي نفسها كعنصر. هذه ظاهرة غريبة، ومع ذلك يوجد مجموعات أخرى يظهر للوهلة الأولى أنها تحقق هذه الظاهرة، كمثال، نأخذ مجموعة الأشياء المعرفة بأقل من ثلاث عشرة كلمة (بما أن هذه المجموعة نفسها معرفة بأقل من ثلاث عشرة كلمة). لنفرض أننا قرَّرنا أن نبعد جميع المجموعات التي هي عناصر من نفسها. المجموعات الباقية لن تكون عناصر من نفسها؛ كون طائفة هذه المجموعات المقبولة وسمها A. الآن هل A مجموعة مقبولة أو مستبعدة؟ إذا كانت A مجمـوعـة مقبولة فإنها ليست عنصراً من نفسها وعليه فلابد أن تكون من طائفة المجموعات التي تحقق هذه الخاصية، أي أن A تنتمي للمجموعة A ولذا فإننا نستبعد A. إذا لم نقبل A، فإن A عنصر من نفسها؛ وبما أن جميع عناصر A مجموعات ليست عناصر من نفسها، إذن فهي مقبولة وعليه فإننا نقبل A. إذاً لو كانت A مجموعة أصلا لوقعنـا في تناقض منطقي. الحل الوحيد لهذه المعضلة هو أن نقول إن الجمل التي نستعملها لتعريف A لاتعرف أي مجموعة في الحقيقة.

سنرى تناقضا آخر بخصوص «مجموعة جميع المجموعات» في الجزء (٣).

٢ - مجموعـــات الأعداد الحقيقيـــة

لكي نبـدأ، سنفرض أن القارىء يعرف نظام الأعداد الحقيقية. سنفترض معرفة خصائصه الجبرية المتعلقة بالجمع، الطرح، الضرب والقسمة وكذلك المتراجحات. يبقى خاصية واحـدة ليست معـروفة لدى الكثير من الناس مع أنها تمثل الأساس لمفـاهيم رئيسية من التفاضل والتكامل مثل مفهوم النهاية ومفهوم التقارب. يمكن التعبـير عن هذه الخـاصية بعـدة صياغـات متكافئة، وسوف نختار الصياغة التي تنـاسبنـا. سنأخذ خاصية أصغر حد أعلى (Least upper bount property) كحجر الأسـاس. قبـل أن نشرح معنى هذه الخـاصية، نحتاج إلى بعض المصطلحات. لنفـرض أن E مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية. نقول إن E محدودة من أعلى إذا وجــد عدد M بحـيث $X \leqslant M$ لجميع X في E. مثــلاً، مجمــوعــة الأعــداد الحقيقية والتي هي أصغـر من العـدد 2 محدودة من أعلى، ويمكن أن نأخذ $M = 2$ أو

$M = \pi$ أو $M = 100$. على العكس من ذلـك، مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ليســت محدودة من أعــلى. إذا كانــت E محدودة من أعــلى فإن B أصــغــر حد أعـلى إذا كانت $B < M$ يمكن استعـمالهـا كما في التعريف السابق. في مثالنا، حيث E مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من 2، أصغر حد أعلى لـ E هو 2. يمكن أن نقـول إن أصغر حد أعلى لـ E هو العدد B الذي يحقق $X \leqslant B$ لجميع X في E وإذا كانت $A < B$ فإنـه يوجـد عنصر X من E على الأقـل بحيث $X > A$. أصغـر حد أعـلى للمجمـوعـة E قد ينتمي أو لا ينتمي إلى E . في المثال السابق، هذا الحد لا ينتمي إلى المجموعة. إذا عدلنا المثال، وجعلنا E جميع الأعداد التي لا تزيد عن 2، فإن أصغر حد أعلى لـ E يبقى 2 ولكنه ينتمي الآن للمجموعة E .

حتى الآن تكلمنـا عن أصغـر حد أعـلى ولكننا لانعلم عن وجود مثل هذا الشيء. إن خاصية أصغـر حد أعلى والتي نقبلها كإحدى مسلمات الأعداد الحقيقية تنص على وجـود أصغـر حد أعـلى لكـل مجموعة E غير خالية ومحدودة من أعلى. بمعني آخر، لو أخذنا كل الحدود العلوية للمجموعة E فإنه يوجد عنصر أصغر لهذه المجموعة (ومن هنا جاءت التسمية). سنرمز لأصغر حد أعلى للمجموعة E بالرمز sup E أو $\sup_{x \in E} x$ عنــدمــا ينتمي sup E لـ E فإننـا نكتب أحيانـا max E بدلاً من sup E . إذاً max E هو أكبر عنصر من E إذا كان للمجموعة E عنصر أكبر. أكبر حد سفلي (Greatest lower bound) يعرف بطريقة مشابهة ونرمز له بالرمز inf . انظر التمرين (٢-٢).

الفترة هي مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين عددين، أو كل الأعداد الحقيقية التي تقع على جهة أو أخرى من عدد معطي. بصورة أدق، الفترة تتكون من كل الأعـداد الحقيقية X التي تحقق متراجحـة من الأشكـال التالية: $a < x < b$ ، $a \leqslant x < b$ ، $a < x \leqslant b$ ، $a \leqslant x \leqslant b$ (حـيـث $a < b$)، $x > a$ ، $x \geqslant a$ ، $x < a$ أو $x \leqslant a$. إذا استعملنـا قوسا كبيرا بدلاً من $\leqslant$ أو $\geqslant$ وقوسا صغيرا بدلاً من $<$ أو $>$ فإننـا نحصـل علي الـرموز التالية للفترات: (a, b) ، $[a, b)$ ، $(a, b]$ ، $[a, b]$ ، (a, ∞) ، $[a, \infty)$ ، $(-\infty, a)$ ، $(-\infty, a]$. وهـكـــذا $(0, 1]$ يعـني مجمــوعـــة الأعـــداد الحقيقية X بحيث $0 < X \leqslant 1$. (استعمال الرموز ∞ هنا لا يعني وجود عدد وإنما هو رمز مناسب).

تمريـن (٢-١)
اوجـد مجمـوعـة الحـدود العليا، ومجموعة الحدود السفلي، sup E و inf E لكل من المجموعات التالية:

(أ) الفترة $(0, 1)$

(ب) الفترة $[0, 1)$

(جـ) الفترة $(0, 1]$

(د) الفترة $[0, 1]$

(هـ) مجموعة الأعداد 1 ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، ...

(و) المجموعة المكونة من العدد 0 فقط.

تمريـن (٢-٢)
اعط تعريفاً مفصلاً لـ inf E وصغ خاصية أكبر حد سفلي، واثبت أنها تكافىء خاصية أصغر حد علوي.

إذا لم تكن E محدودة من أعلي فإننا نكتب $\sup E = +\infty$، وإذا لم تكن E محدودة من أسفل نكتب $\inf E = -\infty$. هذه اختصارات مناسبة ولاتعني وجود أعداد حقيقية $+\infty$ و $-\infty$، هذه الأخـيرة ليست أعـداد. من الممكن أن ننشىء هذه الأعـداد الـلانهائية ونضيفهـا إلى نظام الأعـداد الحقيقي ولكن هذا غير مرغـوب في معظم الحـالات. بغض النـظر عن طريقـة معالجة هذه الأعداد اللانهائية، إنها ستجعل العمليات الحسـابية أصعب مما هي عليه الآن: في البـداية يوجد عملية مستحيلة واحدة وهي القسمة على الصفر ولكن إذا جعلنا هذه العمليه ممكنه فاننا نحصل على عمليات مستحيلة أخرى.

تمريـن (٢-٣)
ابحث نتـائـج تقديم الأعداد ∞ + و ∞ - بحيث ∞ + = $\frac{a}{0}$ إذا كانت a > 0 ، ∞ - = $\frac{a}{0}$ إذا كانت a < 0 .

هل يمكن اعطاء معنى معقول لـ (∞ -) + ∞ + ؟ وكذلك لـ (∞ +) . 0 ؟

إذا كانت المجموعة محدودة من أعلى ومن أسفل فنقول إنها محدودة. المجموعة غير الخالية والمحدودة E تتميز بأن كلاً من inf E و sup E نهائي أو بأنها محتواة في فترة نهائية (a, b) .

لقد افترضنا عند مناقشتنا للحدود العليا والسفلي ان المجموعات غير خالية. لكي نتفادى الحالات الخاصة عندما تكون المجموعة خالية، سنتفق على أنه إذا كانت E خالية فإن sup E = - ∞ و inf E = + ∞ . هذا الاصطلاح يمكننا من أن نقول أن sup (E U F) يساوي العنصر الأكبر من sup E و sup F بدون ضرورة فحص ما إذا كانت المجموعات E أو F خالية.

تمريـن (٢-٤)
إذا كانت E غير خالية، فبرهن أن inf E ≤ sup E ، وأن العلاقه تصبح فعلية (>) إذا كانت E تحوي عنصرين على الأقل.

٣ - المجموعات القابلة وغير القابلة للعد

إذا كانت لدينا مجموعة E بخمسة عناصر مثل أصابع اليد فإننا نستطيع عد المجموعة E . وهـذا يعني تمامـاً ما نتـوقعـه، أى نشير إلى عناصر E واحداً واحداً بينما نعد 1 ,2 ,3 ,4 ,5 . بمعنى آخـر، نرقم عنـاصر E بواسـطة الأعـداد 1 ,2 ,3 ,4 ,5 . بلغة الرياضيات نقول إننا وضعنا عناصر E في تناظر أحادي مع الأعداد 1 ,2 ,3 ,4 ,5 .

إنـه من المفيد تعميم مفهوم العد إلى مجموعات بعدد لانهائي من العناصر. لنفرض أن E مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة. في هذه الحالة، لا نستطيع استهلاك جميع العناصر عن طريق عدها واحداً بعد الآخر وذلك لأن العناصركثيرة جداً. ومع ذلـك، نستـطيع تصور ترقيم جميع عناصر E بالأعداد الصحيحة الموجبة، بحيث

يرتبط كل عنصر من E بعـدد صحيح مختلف: ما علينا إلاَّ أن نرقم كل عدد زوجي بالعدد الذي يساوى نصفه، أي أننا نربط العدد 2n بالعدد n . حيث إنه من الممكن إيجاد تناظر أحادي بين الأعداد الزوجية والأعداد الصحيحة كلها بهذه الطريقة، فيمكن القول بإنه يوجد نفس العدد من المجموعتين، بدون تحديد عدد عناصر هذه المجموعات.

إن أهمية هذا المفهوم تأتي بالدرجة الأولي من وجود مجموعات لايمكن عدها وعل هذا الأساس يمكن تصنيف المجموعات حسب إمكانية عدها أو عدمه. يمكن اعتبار المجموعات غير القابلة للعد «أكبر من المجموعات القابلة للعد». (كما رأينا قبـل قليل، المجمـوعة قد لا تكون أكبر من إحدى مجموعاتها الجزئية الفعلية بهذا المفهوم الجديد). قبل أن نبرهن على وجود مجموعات غير قابلة للعد، سوف نحتاج إلى بعض المصطلحات الجديدة وسوف نعطي أمثلة إضافية لمجموعات قابلة للعد.

لكي نعد مجموعة علينا أن نضع عناصرها في تناظر أحادي مع مجموعة ما من الأعداد الصحيحة الموجبة المتتالية والتي تبدأ بالعدد 1 ، وهذه المجموعة قد لا تكون بالضرورة مجموعة جزئية فعلية من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. إذا أمكن عد مجموعة نقول إنها قابلة للعد. (المجموعة الخالية قابلة للعد أيضا: حيث المجموعة الجزئية المناسبة من الأعداد الصحيحة هي المجموعة الخالية). نستطيع كتابة عناصر مجموعة غير خالية وقابلة للعد على النحو التالي $x_1, x_2, x_3, \ldots$ حيث x تمثل أي عنصر من المجمـوعـة والرموز السفلية تمثل الأعداد الصحيحة المتتالية المستخدمة في عد المجموعة إذا بدأنا بعد مجموعة قابلة للعد فإما أن نصل إلى عنصر أخير أو تستمر عملية العـد إلى مالانهاية. في الحالة الأولى، نقول إن المجموعة منتهية وفي الحالة الثانية نقول إن المجموعة غير منتهية قابله للعد.

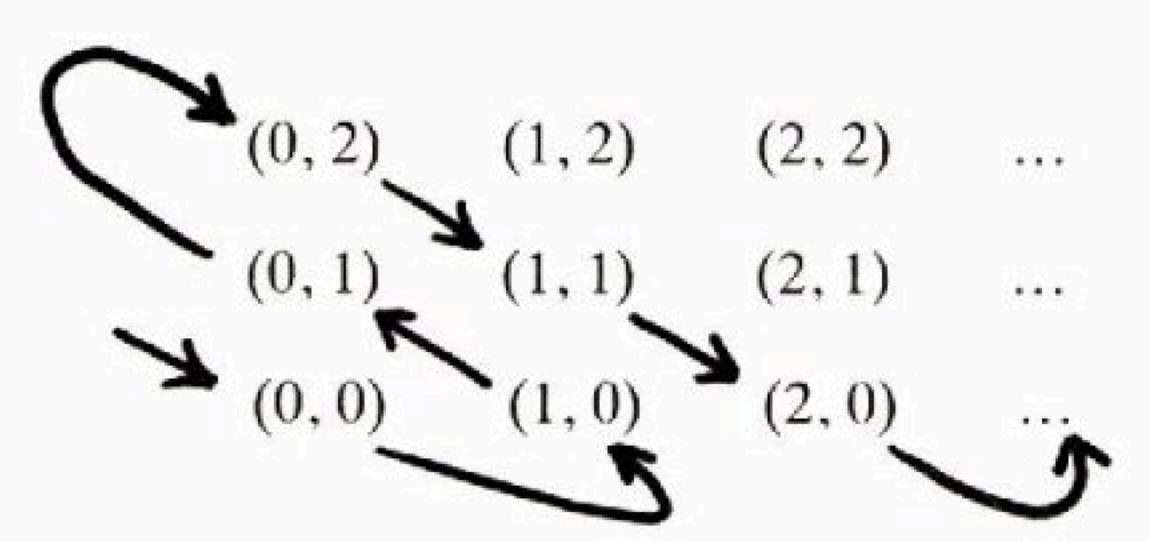
إن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة قابلة للعد، حيث يمكن ترقيم الأعـداد المـوجبـة بواسطة الأعداد الفردية الموجبة وترقيم الأعداد السالبة بالأعداد الزوجية الموجبة على النحو التالي:

العناصـر	...	3	2	1	−1	−2	−3	...
الترقيـم	...	5	3	1	2	4	6	...

تمريـن (٣-١)

برهن بطريقة مشابهة أن اتحاد أي مجموعتين غير منتهيتين وقابلتين للعد تكون قابلة للعد.

والآن نثبت أن النقـاط الشبكية (Lattice) في المستوي قابلة للعد. هذه هي النقاط التي إحداثياتها أعداد صحيحة، مثلاً (1,2) أو (5,18-). نستطيع أن نعد هذه النقاط بسهولة كما في الشكل التالي (لتبسيط الشكل، نوضح النقاط الشبكية التي في الربع الأول فقط، ولكن يمكن عد جميع نقاط الشبكية باستعمال تمرين «٣-١» عدة مرات).



بدون رسم الشكـل، يمكن أن نتصور تجميع جميع النقاط الشبكية (m, n) بحيث m + n تساوى 0, 1, 2, 3, ... وبعد ذلك نعد المجموعات واحدة بعد الأخرى. كل مافعلناه في الشكل هو تمثيل نقاط الشبكية في الربع الأول كاتحاد فئة قابلة للعد من مجموعات قابلة للعد: المجموعات هي الصفوف الأفقية المتتالية.

يمكن دراسة مجموعات أكثر تعقيداً وذلك باستخدام الحقيقة القائلة إن كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد تكون قابلة للعد. بعبارة أخرى، النظرية تقول إذا أمكن ترقيم عناصر مجموعة ببعض الأعداد الصحيحة الموجبة بشرط أن يستعمل كل منها مرة واحدة فقط، فإنه يمكن ترقيم العناصر باستعمال جميع الأعداد الصحيحة المـوجبـة. للتأكد من هذا، لاحظ أن كل عنصر من المجموعة الجزئية المعطاة من المجموعة القابلة للعد يرتبط بعدد صحيح موجب. خذ العنصر المرتبط بأصغر رقم واعطه الرقم الجديد 1؛ بعد ذلك خذ العنصر المرتبط بأصغر رقم من العناصر المتبقية (إذا بقي عناصر) واعطه الرقم الجديد 2، وهلم جرا.

الآن نرى بسهـولة أن الأعداد النسبية الموجبة تكون مجموعة قابلة للعد. يمكن

كتــابــة أي عدد نســبــي موجــب في صورة كسر $\frac{p}{q}$ في أبــسط صورة، حيث q, p أعــداد صحيحــة موجبــة. إذا ربــطنـا الكسر 3/11 بالنقـطة الشبكية (3, 11)، وبشكل عام نربط $\frac{p}{q}$ بالنقطة (p, q)، وهكذا نحصل على تناظر أحادي بين الأعداد النسبية ومجموعة جزئية من نقاط الشبكية، أي مع مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد. إذن الأعداد النسبية الموجبة تكون مجموعة قابلة للعد.

تمريـن (٣-٢)

اثبت أن اتحاد أي فئة قابلة للعد من مجموعات قابلة للعد تكون قابلة للعد.

وهـذا مثال أصعب يتعلق بالأعداد الجبرية: هذه هي الأعداد (حقيقية أو مركبة) والتي يمكن أن تكون جذور لكثيرات حدود عواملها أعداد صحيحة (مثلاً جميع الأعداد النسبية، $2\sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{7}, i, \sqrt{2}$) لكي نبرهن أن مجموعة الأعداد الجبرية قابلة للعد، نلاحظ أولاً أنه يوجد مجموعة قابلة للعد فقط من كثيرات الحدود الخطية بعوامل صحيحة، وكذلك مجموعة قابلة للعد من كثيرات الحدود من الدرجة الثانية بعوامل صحيحة وهكذا.

تمريـن (٣-٣)

برهن صحة الجملة السابقة.

إن عدد جذور كثيرات الحدود والتي درجتها n وعواملها صحيحة لايمكن أن يزيد عن n وعليه فإنها جميعاً قابلة للعد. لذا فإن طائفة جذور كثيرات الحدود من جميع الدرجات وبعوامل صحيحة تصبح مجموعة قابلة للعد من مجموعات قابلة للعد وعليه فإنها قابلة للعد.

وكمثال أكثر تجريداً نأخذ جميع المجموعات الجزئية المنتهية من مجموعة معينة قابلة للعد. مجموعة المجموعات الجزئية المكونة من عنصر واحد قابلة للعد، كذلك مجموعة المجموعات الجزئية بعنصرين قابلة للعد، وهكذا. نحصل مرة أخرى على مجموعة قابلة للعد من مجموعات قابلة للعد. (كما سنرى فيما بعد، المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية من مجموعة لانهائية وقابلة للعد غير قابلة للعد).

يمكن استعـمال مفهوم قابلية العد أحياناً لإثبات وجود بعض الأشياء ذات خواص معينـة. نأخذ مثالا بسيطا، نبرهن أن الأعداد الحقيقية ليست جميعها جبرية. (العدد غير الجبري يسمي عدداً متسامياً Trascendental) الأعداد الحقيقية الجبرية كما نعـرف قابلة للعد، سنفرض في البداية أنها معدودة ومكتوبة علي شكل كسور عشرية. لكي نبسط الرموز وبدون الإخلال بالبرهان، سنقتصر فقط على الأعداد بين 1, 0 .

يمكن تمثيل أي عدد حقيقي بين 0 ، 1 بواسطة كسر عشري فمثلاً

$$1/7 = 0.1428571428571428 \quad \ldots$$

$$\pi - 3 \doteq 0.14159265358979323846 \quad \ldots$$

وبالعكس، كل كسر عشري من هذه الصيغة يمثل عددا حقيقيا بين 1, 0 ، إذا كتبنا مثلاً.

$$x = 0.123456789101112131415 \quad \ldots$$

فإن x بالتأكيد عدد حقيقي بين 1, 0 ، بالرغم من عدم قدرتنا على ربطه مع أي الأعداد المعروفة لدينا. (للمزيد من التفاصيل حول الكسور العشرية انظر الجزء ٦).

لنفرض أننا عددنا جميع الأعداد الحقيقية الجبرية بين 0 ,1 ، إذاً يوجد الأول، الثاني، الثالث، وهكذا، دعونا نسميها a_3, a_2, a_1 .... من هذا نحصل على عمود من الكسور العشرية، والتي قد تبدأ بشيء كالتالي:

$$a_1 = 0.215367 \ \ldots.$$

$$a_2 = 0.652489 \ \ldots.$$

$$a_3 = 0.061259 \ \ldots.$$

$$a_4 = 0.300921 \ \ldots.$$

هذه القـائمه تحوي جميع الأعداد الجبرية بين 1, 0 ، أي أن كل عدد جبري سيظهر في هذه القـــائمـــه عاجــلاً أو آجــلا. نستـــطيع الآن بسهـولـة أن نصنـع كسراً

عشرياً لا يظهـر في هذه الـقـائـمـة أبـداً وعـليه فإنـه غير جبري. فمـثـلاً، إذا كتـبـنـا 0.5655 فنكـون بدأنـا بكسر عشري يختلف عن a_1 في الخـانـة العشرية الأولى، ويختلف عن a_2 في الثانية وعن a_3 في الثالثة وعن a_4 في الرابعة، وطبعاً هذا العدد يختلف عن كل من الأعداد الأربعه. نستطيع الاستمرار حيث نضـع 5 في الخـانة n إذا كانت a_n لاتساوي 5 ونضع 6 في الخانه n إذا كانت a_n تسـاوي 5. الـكسر الـنـاتـج يختلف عن كل a_n في الخـانـة n ولـذا فإنـه لايمكن أن يظهر في قائمة الأعداد الجبرية ولذا فهو غير جبري.

نستـطيع أن نصف العملية السـابقـة بصـورة موجزة إذا جعلنا أرقام العدد الجـبر يالنـوني $a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots$ ونصنـع العـدد الجديد $b = 0 . b_1b_2b_3 \ldots$ حيث $b_n = 5$ إذا كان $a_{n,n} \neq 5$ و $b_n = 6$ إذا كان $a_{n,n} = 5$. (لاحظ أنه لايوجد أهميه خاصه للعددين 6, 5).

أحيانـاً نسمع الاحتجاج على هذا البرهان وإنه «برهان وجود بحت» ولايعطي أي مثال صريح لعدد متسامي. هذا غير صحيح. على الأقل من حيث المبدأ نستطيع أن نعـد الأعـداد الجـبرية بصـورة صريحـة ونـوجـد مفكـوكاتها العشرية ومن هذا يمـكـن كتـابـة عدد متسـامي واحـد على الأقـل إلى أي عدد مرغـوب من الخـانـات العشرية. السبب في أن العـدد π مثـلاً يبـدو محسـوسـاً أكثـر من العـدد الـذي نتحـدث عنـه هو ظهـور π في حالات كثـيرة ولـذا فإننـا نعرف الكثير عنه، فمثلاً حسبت قيمة π إلى بضعة آلاف من الخانات العشرية *.

لقـد برهـنـا على وجـود عدد متسـامـي، لكـي نثبت أن عدداً معينـاً هو في الحقيقـة متسـامي صعب جداً: هذه مسـألـة في نظرية الأعـداد وتـتـطلب طرقـاً أعـمـق من الـبرهـان الـبسيط المستـعجـل هنـا. إن تسـامـي الـعـدد e على قدر لابـأس به من الـصـعـوبـة وتـسـامـي π أصـعـب بكـثـير، وكـذلـك e^{π} و $2^{\sqrt{2}}$ أصـعـب أيضـا؛ وفي الحـقيقـة لاأحـد يعلم فيما إذا كان الـعـدد π^{e} متـسـامـياً أو حتـى إذا كان غير نسـبـي.

* الرموز العلوية الواردة في النص ترجع إلى الملاحظات الواردة في نهاية الكتاب.

هنــاك عدد متــســامــي آخــر وهــو ... 0.10100100000010 حيث يوجــد ! n من الأصفــار بعــد الــواحــد في الخــانــة النــونية. هذا العــدد المتسـامي أبسط من π أو e حيث نستـطيع أن نحـدد أى من أرقامة بدون صعوبة شديدة بينما لانستطيع عمل الشيء نفسه بالنسبة للأعداد π أو e .

إذا تأملنـا في برهاننا السابق حول وجود أعداد متسامية، فإننا سنجد أننا لم نستعمـل أي خاصية للأعـداد الجـبرية ماعدا كونها قابلة للعد. بنفس الطريقة، نستطيع إثبات أنه إذا كانت E أي مجموعة قابلة للعد من الأعداد الحقيقية بين 1,0 فلابد من وجود عدد حقيقي بين 1,0 لاينتمي إلى E . إذاً، لايمكن لأي مجموعة قابلة للعد أن تستهلك مجموعة الأعداد الحقيقية بين 1,0 ، بمعنى آخر نقول إن مجموعة الأعداد الحقيقية بين 1,0 ليست قابلة للعد.

تمريـن (٣-٤)

لايوجد أهمية خاصة للفتره (0,1) بالذات، عدل بالنقاش السابق أو استعمل النتيجة لتبرهن أن مجموعة الأعداد الحقيقية في أي فترة مهما كانت صغيرة غير قابلة للعد.

تمريـن (٣-٥)

برهن أن مجمـوعة الأعداد الحقيقية في (0,1) والتي لايحتوي مفكوكها العشري على الرقم 3، غير قابلة للعد. (العدد 3 هنا ليس له أي أهمية مميزة).

لقد عرَّفنا مجموعة بأنها منتهية إذا كانت قابلة للعد ولكن ليست لانهائية قابلة للعد. من الطبيعي أن **نسمي مجموعة لانهائية** سواء كانت قابلة للعد أو غير قابلة للعد مادامت غير منتهية. **أي مجموعة غير منتهية تحتوي علي مجموعة جزئية لانهائية قابلة للعد**. لنثبت هذا، نختار عنصرا أولا x_1 بصورة عشوائية. المجموعة لاتزال لانهائية بعد أن أخذنا العنصر x_1 منها (لماذا؟)، نختار عنصر آخر x_2 من المجموعة المتبقية ونستمر في تكرار هذه العملية. هذه العملية لاتنتهي أبداً (لماذا؟) إذاً مجموعتنا الأصيلة تحتوى على المجموعة الجزئية اللانهائية والقابلة للعد ... $x_1, x_2,$.

تمريــن (٣-٦)
اجب على الأسئلة في الفقرة السابقة .

تمريــن (٣-٧)
إذا كانت E مجموعة لانهائية و F هي المجموعة E بعد حذف أحد عناصرها فاثبت وجود تناظر أحادي بين المجموعتين . إذن يمكن إيجاد تناظر أحادي بين أى مجموعة لانهائية مع مجموعة جزئية فعلية منها .

تمريــن (٣-٨)
عين تناظراً أحادياً بين فترة منتهية ومجموعة الأعداد الحقيقية .

كتطبيق آخر للمفاهيم السابقه سوف نبرهن أن المجموعة A المكونة من جميع المجموعات الجزئية لمجموعة غير خالية E هي «أكبر» من المجموعة E . **كلمة أكبر هنــا تعني عدم وجــود تنــاظر أحادي بين المجموعة A والمجموعة E أو أي مجموعة جزئية من E . سوف لانحتاج** إلى هذه الحقيقة في المستقبل ولكنها تبر ر ماذكرناه حول الطبيعة المتناقضة لمفهوم «مجموعة جميع المجموعات» .

تمريــن (٣-٩)
اثبت أن مجموعة جميع المجموعات متناقضة مستخدماً النظرية السابقة .

في حالة المجموعات المنتهية نجد بسهولة مجموعتين جزئيتين للمجموعة المكونة من عنصر واحد (المجموعة نفسها والمجموعة الخالية) ، ونجد كذلك أربع مجموعات جزئية للمجموعة المكونة من عنصرين (المجموعة نفسها ، مجموعتين تحتوى كل منها على عنصر واحد والمجموعة الخالية) ، وكذلك نجد ثمان مجموعات جزئية في المجموعة المكونة من ثلاثة عناصر ، وبشكل عام يوجد 2^n مجموعات جزئية في المجموعة المكونة من n من العنــاصر . إذن النظرية صحيحة في حالة المجموعات المنتهية ، البرهان التالي ينطبق علي جميع المجموعات التي تحوى عنصراً واحداً على الأقل .

لتكن E مجموعة بعنصر واحد على الأقل ولنفرض إمكانية إيجاد تناظر أحادي

بين مجموعة جميع المجموعات الجزئية في E ومجموعة جزئية H في E . بمعنى آخر، نفترض إمكانية تسمية المجموعات الجزئية F_X حيث X عنصر في H ، بحيث نسمي كل مجموعة جزئية وبدون استعمال أي عنصر في H أكثر من مرة واحدة. سوف نحصل من هذا على تناقض وهذا يدل على عدم وجود التناظر الأحادي أصلاً. سوف نكوِّن مجموعة جزئية G من E على النحو التالي. لكل X من H نفحص F_x ونرى ماإذا كانت F_x تحوي X . إذا لم تكن X في F_x فإننا نضع X في G (فمثلا العنصر X الذي يجعل F_x المجموعة الخالية، ينتمي إلى المجموعة G ، بينما x التي تجعل F_x تساوى E لاينتمي إلى G). إذاً G مجموعة جزئية فعلية من E وحسب افتراضنا فالمجموعة G ترتبط بأحد عناصر H وليكن z ، أي أن G هي F_z. ولكن من تعريف G ، إذا كان z من F_z فإن z لاينتمي إلى G ومنه نجد أن $G \neq F_z$، وكذلك إذا لم يكن z في F_z فإن G يحوي العنصر z بينما F_z لايحويه ومنه نجد أن $G \neq F_z$. وهكذا نستنتج من افتراضنا الأصلي وجود تناقض وهو أن G تساوي F_z و G لاتساوي F_z وهذا يدل على أن الفرضية الأصلية غير ممكنة. النظرية السابقة تدل على أن مجموعات الأعداد الحقيقية أكثر من الأعداد الحقيقية نفسها.

وبطريقة مشابهة يمكننا أن نثبت أن الدوال الحقيقية المعرَّفة على الأعداد الحقيقية أكثر من الأعداد الحقيقية.

الآن نبرهن الحقيقة التى تبدو مدهشة وهي أن عدد النقاط على قطعة مستقيمة يساوي عددها في مساحة مربعة: **أى أنه يمكن إيجاد تناظر أحادي بين الأعداد الحقيقية بين 1,0 وجميع النقاط في مربع.** (النقاط في مربع أزواج مرتبة من الأعداد الحقيقية) الفكرة العامة للتناظر هنا سهلة: إذا كان لدينا عددان حقيقيان في صورتيهما العشرية فإننا نشبك أرقام العددين لنحصل على عدد حقيقي وبالعكس، نستطيع أن نحلل الصورة العشرية لأي عدد حقيقي ونحصل علي زوج من الأعداد الحقيقية. لكي نجعل الصورة العشرية وحيدة، سوف نختار الصورة العشرية غير المنتهية عندما يكون هناك خيار: فمثلاً نختار ... 0.243999 بدلاً من ... 0.244000 . إن جعل الزوج المرتب (p, q) حيث ... $p = 0 . p_1p_2p_3$ ، ... $q = 0 . q_1q_2q_3$ يناظر العدد ... $0 . p_1q_1p_2q_2$

لايمكن أن ينجـح ، فمثـلاً العدد ... 0.13201020 يناظر (p, q) حيث ... p = 0.1212 ، ... q = 0.300 والأخير عدد عشري غير مقبول حسب اتفاقنا - نستطيع أن نتحاشى هذه الصعـوبة بسهولة . ماعلينا إلاّ أن نضم كل رقم لايساوي الصفر إلى سلسلة الأصفار التى تسبقه مباشـرة ونعامل هذه المجموعات من الأرقام كوحدات مستقلة . فمثلاً ... 0.13201020 يناظر الآن الزوج (p, q) حيث ... p = 0.1202 و ... q = 0.301 وبالمثل الزوج (p, q) حيث ... p = 0.003100054 ، ... q = 0.100359 يناظر العدد الحقيقي ... 0.003110030005549 .

كثيراً مايصعب تحديد تناظر أحادي بين مجموعتين ، وقد يكون أسهل علينا إيجاد تناظر أحادي بين كل مجموعة ومجموعة جزئية من الأخري . نظرية شـرودر - برنشتـاين التالية (Schroeder-Bernstein theorem) مفيدة في هذه الحالات . **إذا كان لدينا مجموعتان B, A وأمكن ايجاد تناظر أحادي بين A ومجموعة جزئية من B وكذلك تناظر أحادي بين B ومجموعة جزئية من A فإنه يوجد تناظر أحادي بين B, A** [١أ] .

لنفرض في البداية أن المجموعات الجزئية في B, A المذكورة في النظرية لاتساوي B, A وإلاَّ فليس لدينـا مانـثـبـتـه . لدينـا تنـاظـر ان أحـاديان ، الأول بين A ومجمـوعـة جزئية من B (نسميه S) والآخـر بين B ومجمـوعـة جزئية من A (نسميه T) . خذ أي عنصر a_1 في A واوجـد صورتـه b_1 في B بالتحويل S ، ثم اوجد صورة b_1 بالتحـويل T ولتكن a_2 وهلم جرا . هذه العملية قد تعود بنا إلي a_1 بعد عدد منته من الخطوات وقد لاتنتهي أبداً . ولكن الشيء الذي لايمكن حدوثه هو أن نحصل على سلسلة من العناصر التي تتقاطع مع نفسها فمثلاً أن يكون $a_5 = a_2$ ، لوحدث هذا فإن T تحمل b_1 إلى a_2 وتحمل b_4 إلى a_2 . هذا يتناقض مع كون T تناظرا أحاديا إلاَّ إذا كان $b_1 = b_4$ وفي هذه الحالة نجد أن $a_1 = a_4$. كذلك قد يحدث أن يكون a_1 صورة لأحد عناصر B بالتحويل T وفي هذه الحالة نستطيع أن نمدد السلسلة (chain) من a_1 في الاتجاه الآخر بصورة قد لاتنتهي . إذا بقي أي عنصر من A فإننا ناخذه ونبدأ سلسلة جديدة .

بهذه الطريقة نحصل على تجزئة لعناصر A في مجموعات منفصلة : A_1 تتكون من الـعـنـاصر التي تنتمي إلى سلاسـل مكـونـة من زوج من العنـاصر (أي

$a_1 \xrightarrow{T} b_1 \xrightarrow{S} a_1$)، A_2 تتكـون من العنـاصر التي تنتمي إلي سلاسـل مكـونة من زوجـين من الـعـنـاصر (أي $a_1 \xrightarrow{T} b_2 \xrightarrow{S} a_2 \xrightarrow{T} b_1 \xrightarrow{S} a_1$) . . إلـخ كذلـك قد يوجـد عنـاصر في A تنـتـمـي إلى سلاسـل لانهائـية. هنـاك ثلاثـة أصنـاف من السـلاسـل الـلانهائية: هنـاك سلاسـل بعنصر أول في A بحـيث لايتـحـول أي من عنـاصر B إلـيه بتـاثـير T ، وسـلاسـل بعـنصر أول في B ، وأخـيراً سلاسـل ليس لها عنصر أول. نسـمـي هذه المجموعات A, A_{-1}, A_0 على الترتيب. المجموعات A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ... , A_∞ منفصلة وكل عنصر في A ينتمي إلى واحدة منها. لتكن B_k مجموعة عناصر B التي تنتمي إلى سلاسل تحتوي على عناصر من A_k. حيث إننا نستطيع أن نبدأ السلسلة من عنصر في B بدلاً من عنصر في A فإننا نجد أن B_k مجموعات منفصلة وكل عنصر في B ينتمي إلى واحدة منها.

من الواضح أن A_1 و B_1متناظرتان أحادياً. A_1 تحوي زوجا من عناصر A مرتبطة بزوج من عناصر B_2، نجعل A_2 تناظر B_2 وذلك بربط العنصر الأول من زوج A بالعنصر الأول من زوج B وهكذا. نستمر بنفس الاسلوب مع A_k و B_k لجميع قيم $k = 3, 4, ...$. كذلك نضع A_o في تناظر أحادي مع B_o وذلك بالتعامل مع كل سلسلة على حدة. اربط العنصر الأول a_1 بصـورتـه b_1، اربط a_2 بصـورته b_2 وهكذا. بمعنى آخر استخدم S لتحويل A_o إلى B_o. لاحظ أننا هنا نستخدم كون السلاسل في A_o غير منتهية. بنفس الـطريقـة، نستخـدم T لإيجـاد تناظر أحادي بين A_{-1} و B_{-1}. أخـيراً A_∞ و B_∞ تتكـون من سلاسل غير منتهية من الطرفين هنا نستطيع استعمال S أو T . بهذا نكون قد أوجدنا تناظراً أحادياً بين A_k و B_k المرافقة لها وهذا يثبت وجود تناظر أحادي بين A و B .

كتطبيق لنظرية شـرودر - برنشتاين، سوف نبرهن **أن المجموعة المكونة من جميع مجموعات الأعداد الطبيعية الموجبة تساوى مجموعة الأعداد الحقيقية من حيث العـدد** (تـذكر أن مجموعة المجموعات المنتهية من الأعداد الطبيعية الموجبة مجموعة لانهائية قابلة للعد). في البداية، إذا كان لدينا عدد حقيقي r بين 1, 0 فإننا نكتبه في صيغة عشرية غير منتهية، مثل ... 0.20015907 . هذا العدد يعين مجموعة الأعداد

التالية 20, 10000, 500000, 9000000, ... وبشكل عام، إذا ظهر الرقم $a \neq 0$ في الخانة العشرية النونية للعدد r فإننا نضيف إلي مجموعتنا العدد الذي صيغته العشرية a متبوعة بنون من الأصفار. على هذا الأساس، نحصل على مجموعة من الأرقام المختلفة وأي عددين مختلفين يعطيان مجموعتين مختلفتين من الأرقام.

قد يبدو لأول وهلة أننا لانحصل إلاَّ على جزء يسير من مجموعات الأعداد الطبيعية الممكنة. ولكن دعونا نأخذ مجموعة اختيارية من الأعداد الطبيعية ولتكن S . سوف نعين عدداً حقيقياً وحيداً يناظر S بالطريقة التالية. أولاً نكتب العدد $u = 0.123456789101112 \ldots$ (العدد مكون من الأعداد الطبيعية بترتيبها الطبيعي). إذا ظهر الرقم n في S فإننا نستبدله في u بسلسله من الأصفار. على سبيل المثال، إذا كانت $S = \{1, 8, 12, 13, 17\}$ فإن العدد الحقيقي الذي يناظر S هو $0.0234567091011000014151600181 9 \ldots$

وإذا كانت S تتكون من الأعداد الموجبة الزوجية فإن العدد المنشود يكون $0.10305070900110013 \ldots$

وهكذا نحصل على تناظر أحادي بين مجموعة الأعداد الطبيعية بكاملها ومجموعة معينة من الأعداد الحقيقية وكذلك تناظر أحادي آخر بين مجموعة الأعداد الحقيقية بكاملها ومجموعة معينة من مجموعات الأعداد الطبيعية. من نظرية شرودر - برنشتاين، نستنتج وجود تناظر أحادي بين المجموعة المكونة من مجموعات الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الحقيقية.

تمرين (٣-١٠)

برهن أن مجموعة متواليات الأعداد الحقيقية تساوي مجموعة الأعداد الحقيقية من حيث العدد.

٤ - الفضاءات المترية (Metric Spaces)

الفضاء مفهوم مرادف لمفهوم المجموعة إلاَّ أننا في الفضاء نركز على المجموعات الجزئية. عندما نصف مجموعة ما بأنها فضاء فإننا في العادة نضع شروطاً إضافية على

عناصر المجموعة. **الفضاء المتـري** مجموعة (غير خالية) حيث نستطيع الحديث عن المسافة بين نقطتين. إنه تعميم للمستقيمات والمستويات والفراغات، حيث نحتفظ ببعض الخواص الهندسية في التعميم.

نشترط أن تحقق المسافة بين نقطتين الشـروط التالية (المسافة الإقليدية المعتادة تحقق هذه الشروط طبعاً): المسافة عدد حقيقي غير سالب وتكون صفراً إذا تطابقت النقـاط فقط، المسافة تبقى نفسها في كل من الاتجاهين الممكنين، مجموع ضلعي مثلث يساوي الضلع الثالث على الأقل. إذا رمزنا للمسافة بين النقاط y, x بالرمز $d(x, y)$ فإن

(١) $d(x, y) \geqslant 0$ ، $d(x, x) = 0$ ، $d(x, y) > 0$ إذا $x \neq y$ (الخاصة الإيجابية)

(٢) $d(x, y) = d(y, x)$ (خاصية التناظر)

(٣) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (المتراجحة المثلثية)

الكثير من الخصائص الهندسية ترتكز على هذه الخواص الثلاث فقط. وعليه فإن الكثير من النظريات حول الفضاء العادي تبقى صحيحة في فضاءات آخرى مختلفة تماماً حيث النقاط ليست نقاطاً عادية ولكن قد تكون دوال مثلاً. إن إمكانية استخـدام اللغـة الهندسية في الفضاءات المترية تجعل الكثير من المفاهيم حدسية ولكنها قد تضلل أحياناً.

هذه بعض الأمثلة البسيطة للفضـاءات المـترية. الفضاء الإقليدي أحادي البعد R_1 وهو مجموعة الأعداد الحقيقية حيث $d(x, y) = |x - y|$. الفضاء الإقليدي ثنـائي الأبعـاد، R_2 وهـو مستوى الهندسة التحليلية والمسافة هي المسافة العادية. النقـاط هنـا أزواج مرتبـة من الأعـداد الحقيقية (الترتيب يعني أن (x, y) لايساوي (y, x)). المسافة من (x_1, y_1) إلى (x_2, y_2) تساوي

$$\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}^{1/2}$$

وبنفس الطريقة نعرف الفضاء الإقليدي بنون من الأبعاد R_n.

تمرين (٤-١)

إذا استعملنا النقاط ولكن غيَّرنا تعريف المسافة فإننا نحصل على فضاء جديد. فمثلاً إذا كانت المسافة على R_2 تساوي $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ فاثبت أننا نحصل على فضاء متري، أوجد مثلثاً مجموع ضلعيه يساوي لضلع الثالث، وارسم المحل الهندسي للنقاط التي تبعد الوحدة عن $(0,0)$. اعمل الأشياء السابقة إذا كانت المسافة تساوي القيم الكبرى من $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$.

في الأمثلة الثلاثة التالية ستكون عناصر الفضاء متتاليات لانهائية من الأعداد. بما أن عناصر R_n متتاليات بنون من الأعداد، فإنه يمكن اعتبار «فضاءات المتتاليات» هذه تعميم لانهائي الأبعاد للفضاء R_n.

الفضاء C_o يمثل جميع المتتاليات التي تتقارب إلى الصفر. نقاطه متتاليات من الأعداد: $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ حيث $\lim x_n = 0$ إذا رمزنا للمتتالية بالرمز x، فإن المسافة $d(x, y)$ تساوي $\sup_{n \geq 1} |x_n - y_n|$. فمثلاً إذا كانت $x = \{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$ و $y = \{1, -1, 0, 0, \ldots\}$ فإن $d(x, y) = \frac{3}{2}$.

الفضاء m هو مجموعة المتتاليات المحدودة. عناصره متتاليات من الأعداد ولكن يشترط أن تكون محدودة. المسافة مثلها في الفضاء C_o. إذا كانت $x = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ و $y = \{1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, \ldots\}$ حيث لايوجد y_n سالبه أو تزيد عن 9. هنا لايمكن حساب المسافة $d(x, y)$ إلاّ إذا عرفنا المزيد عن كيفية تكوين y. إذا علمنا أن $y_9 = 3$، $y_{10} = 5$، $y_{11} = 8$، $y_{12} = 9$ فإننا نلاحظ أن $d(x, y) = 9$ حيث إنها أكبر قيمة ممكنة.

الفضاء L^2 يرمز للمتتاليات التي مجموع مربعات أحداثياتها متقارب. العناصر هنا متتاليات مثل $x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ حيث $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots < \infty$. نعرِّف المسافة $d(x, y)$ بأنها $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2\right\}^{1/2}$. لكي نثبت المتراجحة المثلثية في هذه الحالة نحتاج إلى متراجحة منكوسكي (Minkowski's Inequality):

$$d(x,z) = \{\Sigma (x_n - z_n)^2\}^{1/2}$$

$$= [\Sigma \{(x_n - y_n) + (y_n - z_n)\}^2]^{1/2}$$

$$\leq \{\Sigma (x_n - y_n)^2\}^{1/2} + \{\Sigma (y_n - z_n)^2\}^{1/2}$$

$$= d(x,y) + d(y,z).$$

الآن نأخذ بعض الفضاءات المترية والتي نقاطها دوال.

الفضاء C يمثل الدوال المتصلة المعرفة على الفترة المغلقة $[0,1]$. عناصره دوال متصلة $x = x(t)$ حيث $0 \leq t \leq 1$ والمسافة

$$d(x,y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

فمثلاً، إذا كانت $x(t) = \cos \pi t$ و $y(t) = 2t - 1$ فإن $d(x,y) = 2$.

الفضاء B هو فضاء الدوال المحدودة المعرفة على $(0,1)$ حيث $d(x,y) = \sup_{0<t<1} |x(t) - y(t)|$. (علينا أن نكتب sup بدلاً من max هنا لأن $|x(t) - y(t)|$ قد لايأخذ قيمته العظمى). فمثلاً، إذا كانت $x(t)$ تساوي $1-n^{-1}$ على الفترة $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ حيث $n = 1, 2, \ldots$ و 0 تمثل الدالة التي تأخذ القيمة الوحيدة صفر على الفترة $(0,1)$ فإن $d(x,0) = 1$.

فضاء الدوال المتصلة على فترة معينة مثل $[0,1]$ يعطي فضاءً مترياً إذا كانت المسافة

$$d(x,y) = \left\{\int_0^1 |x(t) - y(t)|^2\right\}^{1/2}$$

تمرين (٤-٢)

أي مجموعة جزئية (غير خالية) من فضاء متري تكون فضاء مترياً بنفس المسافة المعرفة على الفضاء الأصلي.

تمريـن (٤-٣)
يمكن جعل أي مجموعة غير خالية فضاءً متر ياً إذا عرَّفنا عليها المسافة $d(x, y) = 1$ إذاً $x \neq y$ و $d(x, x) = 0$.

٥ - المجموعات المفتوحة والمغلقة

هناك العديد من المجموعات الهامة في الفضاء المتري والتي تحتاج إلى أسماء خاصة. سوف تخصص الأجزاء 5, 6, 7 لهذه المجموعات الهامة.

إن جوار نقطة x ماهو إلاَّ تعميم لمنطقة دائرية مركزها x : إذن الجوار مجموعة النقاط y التي بعدها عن نقطة x أقل من عدد موجب معين r ، أي $d(x, y) < r$. في الواقع، جوارات x في R_2 هي الأقراص الدائرية المتمركزة حول x . في الفضاء R_1 ، تصبح الفترات التي مركزها x ، وفي R_3 ، تصبح كرات مجسمة. إذا كانت $r < 1$ فإن الجوارات في فضاء التمرين (٤-٣) تصبح نقاطاً وحيدة.

نقـول عن مجمـوعـة أنها محدودة إذا كانت داخـل جوار ما. فمثـلاً الفـترة $(0, 1)$ في R_1 محدودة، بينما الفترة $(1, \infty)$ غير محدودة. هذا التعريف يتفق مع التعريف الذي استعملناه في السابق في حالة الفضاء R_1 ، أي أن المجموعة المحدودة لها أصغر حد أعـلى وأكبر حد أدنى ولكن هذه الخاصية غير صحيحة في الفضاءات المتر ية بشكل عام.

تمريـن (٥-١)
صف الجوار في الفضاء C .

تمريـن (٥-٢)
صف الجوارات في الفضاء المكون من نقاط R_2 حيث الإحداثيات أعداد صحيحة والمسافة هي مسافة R_2 .

إذا كانت E مجمـوعة في فضاء متر ي و x تنتمي إلى E فإننا نقول إن x نقطة داخلية من E إذا وجد جوار حول x (مهما كان صغيراً) جميع نقاطه تنتمي إلى المجموعة

E . الهـدف من هذا التعريف هو إعطاء مفهوم «داخل مجموعة» بحيث يتفق مع مفهومنا الحدسي لمعنى «الداخل» وهذا التعريف ناجح إلى حد كبير في الفضاء R_2 مثـلاً . فعلى سبيل المثال، مجموعة نقاط R_2 ، (x, y) حيث $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ تكون مربع وداخله يتكون من جميع نقاط المربع التي لاتقع علي محيطه . على العكس من ذلـك، مجمـوعـة النقـاط القياسية على R_1 ليس لها نقاط داخلية على الإطلاق. في التمـرين (٤-٣)، أخـذنـا فضاء من نقاط اختيارية حيث المسافة $d(x, y)$ إما 1 أو 0 حسب ما إذا كانت $x \neq y$ أو $x = y$. في هذا الفضاء أي نقطة تنتمي إلى مجموعة لابد أن تكون نقطة داخلية فيها . في الحقيقة، إذا اعتبرنا أي مجموعة من فضاء متري على أنها فضاء متري جديد في حد ذاته بالمسافة الأصلية فإن جميع نقاطه تصبح نقاطاً داخلية في الفضاء الجديد . إذن مفهوم النقطة الداخلية لايعتمد فقط على المجموعة وإنما على الفضاء الذي تقع فيه المجموعة .

لتكن E مجمـوعة في فضاء متري، x ليست بالضرورة في E ولكن كل جوار للنقـطة x (مهما كان صغيراً) يحتوي علي نقطة واحدة على الأقل من E (قد تكون نفسها) وكذلك نقطة واحدة على الأقل من C(E) (قد تكون x نفسها أيضاً)، وفي هذه الحـالـة نقـول إن x **نقطة حـدية** (Boundary Point) للمجموعة E . حدود E تعني مجموعة النقاط الحدية لـ E . حدود المربع في R_2 هي مانتوقعه بالضبط . في R_1، حدود الفـترة $[a, b]$ أو الفترة (a, b) تتكون من النقطتين a, b فقط . وهي أيضا حدود المجموعة المكونة من النقطتين b, a .

لاحظ أن مفهـوم نقطة حدية لاعلاقة له بكون المجموعة محدودة . فقد تكون حدود مجمـوعـة غير محدودة، مجمـوعـة غير خالية . فمثـلاً النقطة 0 حدية للفترة $(0, \infty)$ ؛ إذا اعتبرنا R_1 مجموعة جزئية من R_2 فإنها حدود نفسها . على العكس من ذلك، قد يحدث أن تكون حدود مجموعة محدودة وغير خالية، مجموعة خالية (ولكن هذا غير ممكن في R_1 أو R_2).

تمريـن (٥-٣)

في فضاء التمرين (٥-٢) اثبت أن حدود أي مجموعة تكون مجموعة خالية .

تمريـن (٥-٤)

اثبت أن المجموعتين E و C(E) لهما نفس الحدود.

تمريـن (٥-٥)

إذا كانـت E مجمـوعـة و B تمثـل حدود E ، فاثـبـت أن حدود B تكون مجموعة جزئية من B ، وأنها قد تكون مجموعة جزئية فعلية.

تمريـن (٥-٦)

ليكـن N جواراً لـ x ، نصـف قطره r . ماذا يمـكـن قولـه عن الجـوار N :
(أ) إذا كان الفضاء R_2؟ (ب) إذا كان الفضاء المتري اختيارياً ؟

المجموعة التي جميع نقاطها داخلية تسمي مفتوحة ، والمجموعة التي تحوي جميع نقـاط حدودهـا تسمي مغلقه. كما سنرى، المجموعة قد تكون غير مفتوحة وغير مغلقة ، وكذلك قد تكون المجموعة مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت هذه الأمور تعتمد على الفضاء الذي تنتمي إليه المجموعة ، وعلى المجموعة نفسها كذلك.

تمريـن (٥-٧)

في الفضاء R_1 ، الفترة (a, b) مفتوحة (ولذا نسميها فترة مفتوحة) ، والفترة [a, b] مغلقة (ولذا نسميها فترة مغلقة).

تمريـن (٥-٨)

هل الفترات [a, b] و (a, b) مفتوحة ، مغلقة أو غير ذلك إذا كانت مجموعات جزئيه في R_2؟

تمريـن (٥-٩)

برهن أن الفترة (1 ,0] ليست مفتوحة ولامغلقة في R_1.

تمريـن (٥-١٠)
اثبت أن المجموعة الخالية والفضاء كله يكونان دائمًا مفتوحة ومغلقة.

تمريـن (٥-١١)
خذ الـفـضـاء المـتري المـكـون من الـفـترات $(n, n + ½)$ في R_1، حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ وبمسافة R_1. اثبت أنه يوجد العديد من المجموعات المفتوحة والمغلقة في نفس الوقت في هذا الفضاء.

تمريـن (٥-١٢)
هل مجموعة النقاط القياسية في R_1 مفتوحة، مغلقة أو غير ذلك؟

تمريـن (٥-١٣)
إذا اعتبرنا مجموعة التمرين (٥-١٢) فضاءا في حد ذاتها، بمسافة R_1، فاثبت أنه يحوي العديد من المجموعات المفتوحة والمغلقة في آن واحد.

تمريـن (٥-١٤)
اثبت أن جميع المجموعات في فضاء التمرين (٥-٢)، مفتوحة ومغلقة في آن واحد.

تمريـن (٥-١٥)
اثبت أن المجموعة E مفتوحة اذا كانت كل نقطة من E تنتمي الى مجموعة جزئية مفتوحة من E.

هناك العديد من التعاريف المختلفة لمفاهيم المجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة.

تمريـن (٥-١٦)
المجموعة A مفتوحة إذا وإذا فقط لم تحو أياً من نقاطها الحدودية.

تمريــن (٥-١٧)

المجموعة مفتوحة إذا وإذا فقط كانت مكملتها مغلقة .

تمريــن (٥-١٨)

المجموعة مغلقة إذا وإذا فقط كانت مكملتها مفتوحة .

تمريــن (٥-١٩)

عرف نقطة نهاية للمجموعة E بأنها نقطة x (قد تنتمي أو لاتنتمي إلى E) كل جوار لها يحتوى على نقطة واحدة على الأقل من E غير النقطة x . أحياناً نسميها نقطة تجمع أيضاً . المجموعة مغلقة إذا وإذا فقط احتوت على جميع نقاط تجمعها .

تمريــن (٥-٢٠)

كل جوار لنقطة نهاية للمجموعة E يحتوى على عدد لانهائي من نقاط E .

تمريــن (٥-٢١)

مجموعة نقاط النهاية لأي مجموعة تكون مغلقة .

تمريــن (٥-٢٢)

اوجد نقاط النهاية للمجموعات الآتية في R_1 :

(أ) الفترة (0, 1) ، (ب) المجموعة المكونه من ... ,1, ½, ⅓, ¼ ،

(جـ) مجموعة النقاط القياسيه في (0, 1) .

تمريــن (٥-٢٣)

إذا كانت E = AUB ، فإن كل نقطة نهاية لـ E إما أن تكون نقطة نهاية لـ A أو نقطة نهاية لـ B .

إذا كانت f دالـة حقيقية متصلة ومعـرفة على فترة حقيقية و C عدد حقيقي

معـطى فإن مجمـوعـة النقـاط x التي تحقق $f(x) < C$ ، هي مجمـوعـة مفتوحة، أما المجموعات التي تحقق $f(x) = C$ أو $f(x) \leqslant C$ فإنها مغلقة .

إن بنية المجموعات المفتوحة في R_1 بسيطة، هذه المجموعات مكونة من عدد قابل للعد من الفترات المفتوحة المنفصلة . الكلمة قابل للعد هنا غير ضرورية : كل مجموعة من الفترات المفتوحة المنفصلة في R_1 لابد وأن تكون قابلة للعد، حيث إن كل فترة تحتوي على عدد قياسي لايظهر في أي فترة أخري وعليه فإن مجموعة الفترات هذه في تناظر أحادي مع مجموعة جزئية من الأعداد النسبية .

إن البرهان المفصل لكون كل مجموعة مفتوحة غير خالية G في R_1 هي اتحاد فترات مفتوحة يمثل عملية شاقة ولكن الفكرة وراء البرهان بسيطة . بما أن G مفتوحة وغير خالية فإنها تحتوي على نقطة وكذلك جوار لهذه النقطة . نأخذ هذا الجوار الذي هو فترة مفتـوحة في أكبر شكل ممكن. إذا لم تستهلك هذه الفترة الموسعة جميع G ، فإننـا نأخـذ نقـطة جديدة وجـوار لها في G ونكـرر العملية وهكـذا نستمـر. بهذه الطريقة نأتي على جميع نقاط G .

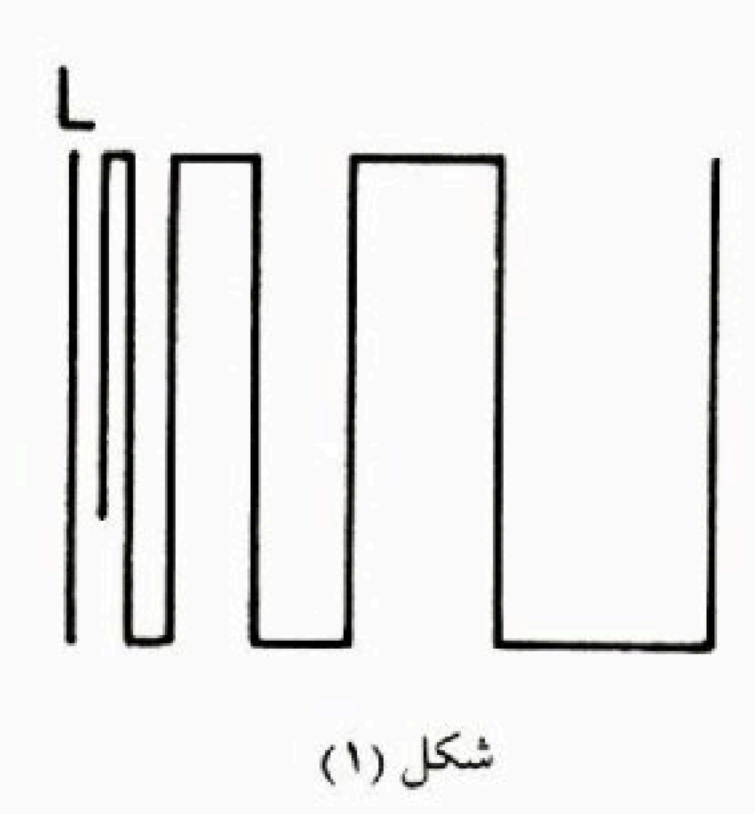
لكـــي نعـــالـــج المـــوضـــوع بعـــنـــاية أكـــثـــر، سوف نفــرض أن G محدودة وإلاَّ فإننا نستطيع أن نغطي G بمجموعة قابلة للعد من الفترات المفتوحة ثم نجمع النتائج لتقاطعات G مع هذه الفترات . إذا برهنا وجود أكبر فترة محتواة داخل G وتحوي نقطة معطَاة x ، فهذا يعني وجود أكبر فترة مفتوحة في G (يوجد عدد نهائي من الأطوال أكبر من 1 ، كذلك يوجد عدد نهائي من الأطوال أكبر من ½ وهكذا) . إذا كانت الفـترة الكبر ى ليست وحيدة، فإنه بإمكاننا أن نرتبها حسب قيمة الطرف الأيسر. نكرر هذه العملية بالنسبه للفترات التالية الأصغر فألاصغر. من هذا نرى أن تمثيل G كاتحاد فترات مفتوحة تمثيل وحيد .

بقى علينا أن نثبت وجود أكبر فترة مفتوحة داخل G وتحوي نقطة معطاة . طبعاً توجد فترة مثل (a, b) (أي جوار لـ x) داخل G . لتكن B أصغر حد أعلى للأعداد b حيث الفترة (x, b) في G . بنفس الطريقة، اجعل A أكبر حد أدنى للأعداد a حيث الفترة (a, x) في G . بما إن G محدودة فإن B, A أعداد نهائية . إذن B لاتنتمي إلى G ، وإلاَّ فإن G تحتوي على جوار لـ B وفي هذه الحالة لن يكون B

حداً أعلى للمجموعة التي عرف عن طريقها. بنفس الأسلوب نثبت أن A لاتنتمي إلى G أيضاً. إذن الفترة (A, B) في G ولا يمكن تكبيرها بدون الخروج من G .

إذا بحثنا عن مجموعات جزئية (غير المجموعة الخالية والفضاء بكامله) في R_1 أو R_2 بحيث تكـون مفتـوحة ومغلقة فسنقتنع بعدم وجود مثل هذه المجموعات. سوف نثبت هذه الحقيقة مستقبلاً. هذه الخاصيه في R_1 و R_2 (وبشكل عام R_n) والتي تسمح بالمجموعات التافهة فقط بأن تكون مفتوحة ومغلقة **تسمي الترابط (connectedness)** . نعرف هذه الخاصية في البداية للمجموعات المفتوحة. المجموعة المفتوحة (وخاصة الفضاء بكامله) **تكون مترابطة** في حالة عدم إمكانية تمثيلها كاتحاد مجموعتين مفتوحتين منفصلتين غير خاليتين. فمثلاً، في الفضاء R_1، اتحاد الفترتين المفتـوحتـين $(0, ½)$ و $(½, 1)$ غير مترابط لأن كلاً من الفترتين مفتوحة، غير خالية ومنفصلة عن الفترة الأخرى.

وبشكل عام، نقول إن المجموعة E مترابطة إذا كان من غير الممكن تغطية E بمجموعتين مفتوحتين تقاطعاتها مع E منفصلة وغير خالية. هذا التعريف قد لايتفق تماماً مع بديهتنا. سوف نثبت قريباً أن R_1 و R_2 مترابطة. إن مجموعة النقاط القياسية في R_1 غير مترابطة لأنه يمكن تغطيتها مثلاً بالمجموعات المفتوحة المعرفة بالمتراجحات $x > \sqrt{2}$ و $x < \sqrt{2}$. على العكس من ذلك فالمجموعة الموضحة في الشكل والتي تتكون من المنحنى المتذبذب الذي يقترب من القطعة المستقيمة والقطعة المستقيمة نفسها مجموعة مترابطة. كما في شكل (١).



شكل (١)

(الرسم البياني للمنحني $y=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ مع القطعة $-1 \leqslant y \leqslant 1$ يعطي شكلاً مماثلاً).
قد يبـدو لأول وهلة إمكـانية فصـل المستقيم L الـذي على يسار الشكل من بقية المجموعة، مثل ما نفصل فترتين مفتوحتين متجاورتين. ولكن أي مجموعة مفتوحة تغـطي أي نقطة من L، لابد وأن تحتوي جوارالنقطة من L والجزء المتذبذب من المنحني يقـطع أي جوار مثـل هذا. ولهذا السبب نفسه، نجد أن المجموعة تبقي مترابـطة لو احتفظنا بالنقاط القياسية من L فقط أو النقاط غير القياسية من L.
باستخـدام مجمـوعات من هذا النوع، نستطيع الحصول على مجموعتين مترابطتين داخل مربع، إحداهما تصل بين رأسين متقابلين من المربع والمجموعة الأخرى تصل الرأسين الآخرين ومع ذلك تبقى المجموعتان منفصلتان.

من الممكن أيضاً الحصول على مجموعة مترابطة بالخاصية التالية:

إذا أزيلت نقطة معينة فإن المجموعة الباقية لاتحوي أي مجموعة جزئية مترابطة على الإطلاق(٢).

المجموعة قد تكون مفتوحة أو غير ذلك حسب الفضاء الذي تنتمي إليه. ولكن يجب ألاَّ نستنتج من تعريف الترابط بدلالة المجموعات المفتوحة، إن مجموعة معينة قد تتغير من مترابطة إلى غير مترابطة إذا أخذت في فضاء آخر. في الحقيقة، خاصية الـترابط تختلف عن خاصية الانفتـاح حيث إن الأولى خاصية جوهـرية للمجموعة. هذا يعني أنه إذا كانت مجموعة مترابطة في فضاء معين فإنها تبقى مترابطة في أي قضاء آخر طالما أن المسافة لاتتغير على نقاط المجموعة.

سوف نبرهن كذلك على أن خاصية عدم الترابط تعتمد على المجموعة فقط. إفرض أن E مجموعة في فضاء متري S و أن E غير مترابطة وأن S_1 فضاء جزئي من S و S_2 فضـاء جزئي من S_2 حيث $E \subset S_1$. علينـا أن نثبت سواء أضفنا نقاطاً إلى S لنحصـل على S_2 أو حذفنـا بعض نقـاط S لنحصـل على S_1 فإن المجموعة E تبقى غير مترابطة.

نفترض في البداية أن $E \subset AUB$ حيث A و B مفتوحتان في S ومنفصلتان وكل من $A \cap E$ و $B \cap E$ غير خاليه.

الانتقال من S إلى الفضاء الأصغر S_1 بسيط. ماعلينا إلاَّ أن نبدل المجموعات

A و B بالمـــجـمـــوعـتـــين الجـــزئـية A_1 و B_1 من S_1 حيث A_1 تشـتـمـــل على نقـــاط A الـــتي في S_1، و B_1 تشـتـــمـــل على نقـــاط B الـــتي في S_1. هذه المجموعات تغطي E ، وتقاطعها مع E غير خال وهي منفصلة. كذلك A_1 مفتـوحـة بالنسبة لـ S_1 حيث إن أى جوار في S_1 للنقطة p من A_1 يتكون من كل النقـاط في S_1 والتي تبعد عن p بمسافة أقل من عدد حقيقي r وهذه النقاط في A ، حيث إن A مجمـوعة مفتوحة من S . إذن هذه النقاط في A_1. كذلك B_1 مفتوحة بالنسبة لـ S_1. إذن E تبقى غير مترابطة في S_1.

الانتقال من S إلى الفضاء الأكبر S_2 أكثر صعوبة. نأخذ الأغطية A و B التي تدل على أن E غير مترابطة في S ونحولها إلى مجموعات في S_2 كمايلي. حيت إن A مفتـوحة فإذا كانت $p \in A$ فإن المسافات من p إلى نقاط B لها حد أدنى موجب (نصف قطر جوار النقطة p الذى في A) لكل p في A نضيف إلى A جميع نقاط S_2 والتي أبعـادهـا من p أقل من نصف أكبر حد أدنى للمسافات من p إلى نقاط B . نسمي المجموعة الموسعة A_2. بنفس الطريقة نحصل على B_2 بتوسيع B .

المجموعتان A_2 و B_2 لاتزالان تغطيان E وتقاطعهما مع E غير خالية. إضافة إلى ذلك، A_2 مفتوحة في S_2. فإذا كانت $q \in A_2$ فإنه يوجد $p \in A$ بحيث $d(p, q)$ أصغر من نصف المسافة من p إلى أى نقطة من B . إذا كانت q' نقطة من S_2 قريبة من q فإن $d(p, q')$ أقل من نصف المسافة بين p ونقاط B وعليه فإن q' ينتمي كذلك إلى A_2. هذا يعني أن A_2 مفتوحة في S_2.

بالمثل نبرهن أن B_2 مفتوحة في S_2.

أخيراً، A_2 و B_2 منفصلتان فلو كان $q \in A_2$ و $r \in B_2$ فإننا نحصل على q و r من النقاط $p \in A$ و $s \in B$ ؛ و $d(q, r) \geqslant d(p, s) - d(p, q) - d(s, r)$ بما أن $d(p, q) < \frac{1}{2}d(p, s)$ و $d(s, r) < \frac{1}{2}d(s, p)$ بالعمل، فإن $d(q, r) > 0$. هذه المتراجحة تعني أن A_2 و B_2 مجموعتان منفصلتان. وهكذا اثبتنا أن E غير مترابطه في S_2.

نستـطيع إثبـات أن R_1 مترابط بسهـولـة. لولم يكن مترابـطا، لكـان اتحاد مجمـوعتين مفتوحتين غير خاليتين ومنفصلتين. هذه المجموعات مغلقة أيضاً (تمرين ٥-١٧) لأن كل منهما مكملة للأخرى. إذاً يكفي أن نثبت أنه لايوجد في R_1 مجموعة

جزئية وغـير خالية بحيث تكـون مفتـوحة ومغلقة. بفرض وجود مثل هذه المجموعة وتسميتها G. G هي اتحاد مجموعة قابلة للعد من الفترات المفتوحة والتي لاتنتمي أطرافها إلى G كما برهنا سابقاً. أطراف الفترات هذه، نقاط حدود (وكذلك نقاط نهاية) للمجموعة G، وبما أن G مغلقة فإن هذه النقاط تنتمي إلى G. هذا التناقض يثبت عدم وجود المجموعة G.

لنثبت أن R_2 مترابط يكفي أن نثبت عدم وجـود مجمـوعـة مفتـوحـة ومغـلقـة غير المـجمـوعـة الخـالـية والـفضـاء كله. لنفـرض أن E مثـل هذه المـجمـوعـة، لتـكـن $p \in E$ و $q \in C(E)$. خذ المـستقيم المـار في q, p واعتبره فضاء L حيث المسافة بين نقطتين في L تساوي المسافة بينهما في R_2. إذاً L صورة مطابقـة لـ R_1. المجمـوعتان $E \cap L$ و $C(E) \cap L$ كلاً منهما مفتوحة ومغلقة في L وغير خالية (حيث إن واحدة تحتوي p والأخرى q). هذا يناقض ترابط R_1.

تمرين (٥-٢٤)

برهن أن كل مجموعة غير خالية في R_2 ما عدا R_2 نفسها لها نقاط حدود.

تمرين (٥-٢٥)

مجمـوعـة إغـلاق E تساوي اتحاد E ومجموعة نقاط النهاية لـ E. اثبت أنها أيضا اتحاد E مع مجموعة نقاط حدود E وأنها مغلقة.

تمرين (٥-٢٦)

ماهو إغلاق المجموعات المذكورة في تمرين (٥-٢٢)؟

تمرين (٥-٢٧)

جوار النقطة x يتكون من النقاط y بحيث $d(x, y) < r$. برهن أن إغلاق هذا الجوار يتكون من النقاط y حيث $d(x, y) \leq r$ في الفضاء R_1 أو R_2. هل هذا صحيح في كل فضاء متري؟

هنـاك حقيقـة هامـة بخصوص المجموعات المغلقة وهي أن **اتحاد مجموعتين مغلقتـين يبقي مغلقـاً وكـذلـك تقـاطع مجموعتين مغلقتين يبقي مغلقاً**. حيث إن المجمــوعــة المغلقــة تحتــوي على جميع نقـاط حدودهـا والعكس صحيح فلكي نبرهـن الجملة الأولى نأخــذ مجمــوعتــين مغلقتــين E_1 و E_2 وأي نقــطة نهاية p للمجموعة $E_1 \cup E_2$؛ علينا أن نثبت أن $p \in E_1 \cup E_2$. من التمرين **(٥-٢٠)** كل جوار للنــقــطة p يحتــوي على عدد لانهائــي من نقــاط $E_1 \cup E_2$ غير الــنــقــطة p، إذن إمــا عدد لانهائــي من نقــاط E_1(غــير p) أو عدد لانهائي من نقــاط E_2 (غــير p). هذا يعني أن p تقــطة نهاية لواحــدة على الأقــل من E_1 أو E_2. بما أن E_1 و E_2مغــلقــتــان إذن $p \in E_1$ إذا كانــت p نقــطة نهاية لـ E_1 و $p \in E_2$ إذا كانــت p نقــطة نهاية لـ E_2. إذن p تنــتــمي على الأقــل إلى واحــدة من E_1 أو E_2، أي $p \in E_1 \cup E_2$. إذن $E_1 \cup E_2$ يحتوي على جميع نقاط نهاياته وإذن فهو مغلق.

الآن نبرهن أن تقاطع مجموعتين مغلقتين مغلق، خذ نقطة نهاية q للمجموعه $E_1 \cap E_2$. كل جوار لـ q يحتوي نقاطاً غير q، تنتمي إلى E_1 وإلى E_2. هذا يعني أن q نقـطة نهاية لـ E_1 ونقطة نهاية لـ E_2. بما أن E_1 و E_2 مجموعتان مغلقتان إذاً q ينتمي إلى كل من المجموعتين، $q \in E_1 \cap E_2$. إذاً $E_1 \cap E_2$ يضم جميع نقاط نهاياته وهو مغلق.

تمريــن (٥-٢٨)

اثبت عن طريق الاستقـراء أن اتحاد عدد منته من المجموعات المغلقة، مغلق وأن تقاطع أي عدد منته من المجموعات المغلقة مغلق.

تمريــن (٥-٢٩)

اثبت أن تقاطع أي عدد (منته أو غير منته) من المجموعات المغلقة، مغلق.

تمريـن (٥-٣٠)
اعط مثالا يدل على أن اتحاد عدد لانهائي من المجموعات المغلقة والقابلة للعدقد لايكون مغلقاً.

تمريـن (٥-٣١)
اثبت أن اتحـاد أي عدد من المجوعات المغلقة يكون مفتوحاً، وأن تقاطع عدد نهائي من المجموعات المفتوحة يكون مفتوحاً، وأن تقاطع مجموعة لانهائية قابلة للعد من المجموعات المفتوحة قد لاتكون مفتوحة.

تمريـن (٥-٣٢)
افرض أن N_1 جوار لـ x بحيث $d(x, y) < r$، وكذلك N_2 جوار للنقطة نفسها بحيث $d(x, y) < r/2$، اثبت أن إغلاق N_2 مجموعة جزئية من N_1. هل من الضروري أن تكون مجموعة جزئية فعلية؟

نقـول إن مجمـوعة E تامة (Perfect) إذا كانت خالية أو كانت مغلقة وجميع نقاطها نقاط نهاية لها. الفترة المغلقة في R_1 تامة، وكذلك اتحاد أي عدد نهائي من الفترات المغلقة. في الجزء التالي سنري أمثلة على مجموعات تامة أخري.

٦ - المجموعات الكثيفة والمخلخلة

المجموعة E كثيفة في كل مكان (Everywhere dense) أو باختصار كثيفة، (Dense) إذا كان إغـلاقها هو الفضاء كله. إذاً E كثيفة إذا كانت جميع نقاط الفضاء، نقاط نهاية للمجموعة E. نقول إن مجموعة مخلخلة (Nowhere dense) إذا كان إغلاقها لايحوي أي جوار. بمعني آخر، E مخلخلة إذا كانت خالية أو إذا كان كل جوار في الفضاء يحتوي على جوار جزئي منفصل عن E. النقاط القياسية في R_1 تكون مجموعة كثيفة. المجموعة المكونة من عدد نهائي من النقاط في R_1، لابد أن تكون مخلخلة. سوف نتعرف فيما بعد على مجموعات مخلخلة أكثر تعقيداً.

لاحظ أن «التخلخل» ليس نقيض «الكثافة في كل مكان». المجموعة غير

الكثيفة في كل مكان تحقق الخاصية أن إغلاقها لايملأ جواراً ما (قد يكون صغيراً). إذا كانت المجموعة غير مخلخلة فإن إغلاقها لابد أن يملأ جواراً ما ولكن ليس الفضاء كله بالضرورة. نقـول أحيانـاً إن المجموعة E كثيفة في فترة معينة، أو في مجموعة أخرى، أو أنها مخلخلة في فترة. هذه العبارات تفسر نفسها.

تمريـن (٦-١)

خذ الفضـاء Ω الـذى عنـاصره الأعـداد ... ,1, 2, 3 في R_1 وبمسافة R_1. صف الجوارات في Ω. هل المجموعة المكونة من العنصر 1، مجموعة مخلخلة في Ω؟

تمريـن (٦-٢)

إذا كانت مجموعة مغلقة لاتحوى أى جوار فإنها مخلخلة.

بما أن كل نقطة من مجموعة تامة هي في الواقع نقطة نهاية للمجموعة، فإننا نتوقع أن أى مجموعة تامة غير خالية لابد وأن تحوى عدداً كبيراً جداً من النقاط. على هذا الأساس، نستغرب وجود مجموعة غير خالية مخلخلة وتامة في آن واحد.

تمريـن (٦-٣)

المجموعة R_1 في الفضاء R_2 مخلخلة تامة.

لايوجـد في R_1 مجمـوعـات مخلخلة وتـامـة بهذه البسـاطـة. مجموعة كانتور (Cantor set) تعطي مثالاً على مجموعة مخلخلة تامة في R_1 ويمكن استخدامها لإنشاء العديد من المجموعات والدوال بخواص غريبة. يمكن إنشاء مجموعة كانتور كالتالي:

خذ الفترة المغلقة [0, 1] في R_1. احذف الثلث الأوسط المفتوح أى الفترة $(1/3, 2/3)$. بعد ذلك، احذف الأثلاث الوسطى المفتوحة من الفترتين الباقيتين، أى احـذف $(1/9, 2/9)$ و $(7/9, 8/9)$ ثم احذف الأثلاث الوسطى المفتوحة من الفترات الأربع الباقية وهكذا نستمر. كما في شكل (٢).

$0 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{8}{9} \quad 1$

شكل (٢)

ماذا يبقى من الفـتره [0, 1] ؟ في البـداية، نلاحظ أن ماحذف هو اتحاد مجموعات مفتوحة (في الحقيقة فترات مفتوحة) ولذا فهو مفتوح، الباقي هو المكملة (بالنسبة إلى [0, 1]) وهو مجموعة مغلقة. أطراف الأثلاث المتوسطة لم تحذف، وبما أن المجموعة المتبقية مغلقة فإن كل نقطة نهاية لنقاط الأطراف لابد وأن تبقى. فمثلاً، إذا بدأنا من $1/3$ وأخذنا أقرب نقطة طرف من الخطوة الثانية ($1/3 - 1/9 = 2/9$)، ثم أقرب نقطة طرف من الخطوة الثالثة ($1/3 - 1/9 + 1/27$) . . . الخ، نقطة النهاية الوحيدة لهذه المجمـوعـة هي $1/3 - 1/9 + 1/27 - \ldots = 1/4$. إذاً يوجـد نقاط نهايات للأطراف ليست أطـرافاً في حد ذاتها. مجموعة كانتور هي المجموعة المتبقية بعد حذف جميع الأثلاث الوسطى: إنها تتكون من جميع الأطراف ونقاط نهاياتها.

لقـد لاحـظنـا أن مجمـوعـة كانتـور مغلقـة. المجمـوعة لاتحوي أي فترة، لأن مجمـوع أطـوال الفـترات المحـذوفة يساوي $1/3 + 2/9 + 4/27 + \ldots = 1$. إذاً فمجموعة كانتور مخلخلة (تمرين ٦-٢). لنثبت أن المجموعة تامة ماعلينا إلاَّ إثبات أن كل نقـطة منهـا نقـطة نهاية. بما أن نقـاط نهايات الأطـراف هي نقاط نهايات للمجموعة بالطبع، يتبقي علينا التأكد من أن الأطراف نقاط نهاية. خذ على سبيل المثال، النقطة $1/3$. إلى يسارها يوجد فترة طولها $1/3$ والتي حذفنا منها الثلث الأوسط ويبقى فترة طولها $1/9$ مجاورة للنقطة $1/3$، ثم نحذف الفترة ($1/9, 2/9$) ويبقي فترة طولها $1/27$ مجاورة للنقطة $1/3$، وهلم جرا. في أى جوار للنقطة $1/3$ سنجد فترة قصيرة لم تحذف عند خطوة معينة وهذه الفترة سوف تشمل طرف ينتمي إلى الخطوة التالية. إذاً $1/3$ نقطة نهايه لنقاط الأطراف. يمكن تطبيق هذه المناقشة على أي نقطة طرف أخرى.

هناك إنشاء حسابي لمجموعة كانتور سنستفيد منه في المستقبل. سوف نستعمل نشر الأعداد الحقيقية في النظامين الثنائي والثلاثي بدلاً من النظام العشري. فمثلا،

$0.10010110 \ldots$ (نظام ثنائـــي)

تعنـــي

$$\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{0}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{0}{2^8}+\dots$$

بينمـــا

(نظام ثلاثـــي) ... 0.10010110

تعنـــي

$$\frac{1}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{0}{3^5}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^7}+\frac{0}{3^8}+\dots$$

(في النـظام الثنائي، لدينا الأرقام 1, 0 فقط، أما في النظام الثلاثي فلدينا الأرقام 2, 1, 0). إذاً ... 0.020202 (في النـظام الثلاثي) = $1/4$. (نستعمل نفس المحاكمة عنـدمـا نجمع عدداً عشرياً متكرراً في النظام العشري: إذا كانت ... $x = 0.0202$ فإن $9x = 2.0202\ldots = 2 + x$) لاحظ أن هذا ليس مفكوك $1/4$ الذي استعملناه لإثبات أن $1/4$ تنتمي إلى مجموعة كانتور ولكنه يكافئه لأن

$$\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\dots=\frac{3}{3^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{3}{3^4}-\frac{1}{3^4}+\dots=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^4}+\dots$$

الآن دعـونا نكتب جميع الأعداد بين 1, 0 في النظام الثلاثي. الأعداد التي رقمها الأول 1 تقع بين $1/3$ و $2/3$، إذاً هذه الأعداد تملأ الفترة الأولى والتي حذفنا داخلهـا عنـد إنشاء مجموعة كانتور. الأعداد التي تبدأ بالرقم 0، تملأ الفترة $0,1/3$ والمجموعة التي رقمها 1 تقع بين $1/9$ و $2/9$، أي تملأ أحد الفترات التي حذفنا داخلها في الخـطوة الثانية من إنشاء مجموعة كانتور. كل عدد استبعد حتي الآن، ظهر الرقم 1 في الخـانـة الأولى أو الثانية من مفكوكه في النظام الثلاثي، وهذا صحيح أيضاً بالنسبـة لنقاط الأطراف ولكن هذه الأخيرة لها مفكوكات لاتحتوي على الرقم 1 فمثلا $1/3 = 0.1000\ldots = 0.0222\ldots$ ، وكـــذلـــك $2/3 = 0.1222\ldots = 0.2000\ldots$. من هذا نجد أن مجموعة كانتور تتكون فقط من الأعداد التي لها مفكوك في النظام الثلاثي لايحـوي الـرقم 1. نقاط الأطراف هي الأعداد التي ينتهي مفكوكها في النظام الثلاثي

بأصفـار أو بالـرقم 2 (وهي طبعـاً متكـافئـة مثـل تكـافؤ ... 0.1000 و ... 0.0999 في النظام العشري).

تمريـن (٦-٤)

برهن أن مجموعة كانتور غير قابلة للعد.

في الحقيقة نستطيع أن نقول أكثر من ذلك: من الممكن إيجاد تناظر أحادي بين مجمـوعة كانتور ومجموعة الأعداد الحقيقية بين 1, 0 . تذكر أن نقاط مجموعة كانتور تتألف من الأعداد التي يمكن كتابة مفكوكها في النظام الثلاثي باستخدام الأرقام 2, 0 فقط. ارفق مع كل من هذه الأعداد x ، عدداً جديداً نحصل عليه من تنصيف كل خانـه في المفكـوك الثـلاثي لـ x ومن ثم تفسـير النتيجـة في النظام الثنائي. بهذه الطريقة، نحصل على كل عدد بين 1, 0 من نقطة ما في مجموعة كانتور، ونقاط أطراف الفـترات المحـذوفة تعطي مفكوكين لنفس العدد، فمثلا $\frac{1}{3} = 0.022...$ في النظام الثـلاثـي و $\frac{2}{3} = 0.200...$ في النـظام الثـلاثي وكـل منهـا تعـطي العـدد $\frac{1}{2} = 0.0111... = 0.1000...$ في النـظام الثنـائي. إذاً التنـاظر أحادي بين مجموعة كانتور ناقص المجموعة القابلة للعد من أطراف الفترات المحذوفة ومجموعة الأعداد الحقيقية ناقص المجمـوعـة القـابلة للعـد من الآعداد التي لها مفكوكان في النظام الثنائي. إذا جعلنا هذه المجموعات القابلة للعد في تناظر أحادي فإننا نحصل على تناظر أحادي بين مجموعة كانتور والأعداد الحقيقية بين 1, 0 .

نقول **إن فضاء متري قابل للفصل (Separable)** إذا احتوى على مجموعة قابلة للعد وكثيفة في كل مكان. فمثلاً، R_1 قابل للفصل لأن الأعداد القياسية تمثل مجموعة كثيفة وقابلة للعد.

تمريـن (٦-٥)

برهن أن R_2 قابل للفصل.

الفضاء C_o (المتتاليات التي تؤ ول إلى الصفر) قابل للفصل. نستطيع الحصول على مجموعة قابلة للعد وكثيفة إذا أخذنا جميع المتتاليات من الأعداد القياسية والتي

جميع إحداثياتها أصفار ما عدا عدد نهائي (مثل $\{1, 0, 0, \ldots\}$ او $\{2/3, -5/2, 3/4, 0, 0, \ldots\}$). هذه المجموعـة قابلة للعد لأن المجموعة المكونة من المجمـوعات النهائية من الأعداد القياسية قابلة للعد. الآن نثبت أنها كثيفة في C_o، تذكـر أن المسـافـة بين نقـطتـين $x = (x_1, x_2, \ldots)$ و $r = (r_1, r_2, \ldots)$ في الفضـاء C_o تساوى $\sup|x_k - r_k|$. لتكن x أي نقـطة في C_o. نريد اختيار نقـطة r حيت جميع r_k قياسية وجميعهـا أصفـاراً ما عدا عدد نهائي، بحيث تكـون $\sup|x_k - r_k|$ صغـيرة. لتكن ϵ كمية موجبـة اختبارية لقياس درجـة الصغر المطلوبة نختار N كبـيرة لدرجـة أن $|x_n| < \epsilon$ لجميع $n > N$. اجعـل $r_1, r_2, \ldots, r_N$ أعـداداً قياسيه بحـيث $|x_n - r_n| < \epsilon$ لكـل $n = 1, 2, \ldots, N$. إذاً $r = (r_1, r_2, \ldots, r_N, 0, 0, \ldots)$ هي النقطة المطلوبة.

سنثبت فيما بعد أن مجموعة كثيرات الحدود كثيفة في فضاء الدوال المتصلة C .

تمريـن (٦-٦)

برهن أن مجموعة كثيرات الحدود غير قابلة للعد.

تمريـن (٦-٧)

برهن أن مجموعة كثيرات الحدود لعوامل قياسية، قابلة للعد.

تمريـن (٦-٨)

برهن أنه إذا كانت مجموعة كثيرات الحدود كثيفة في C ، فإن مجموعة كثيرات الحدود بعوامل قياسية كثيفة أيضاً. استنتج أن C قابل للفصل.

وكمثـال على فضـاء غير قابل للفصل نذكر الفضاء m المكون من متتاليات محدودة من الأعداد الحقيقية. يمكننا التأكد من ذلك كما يلي.

تمريـن (٦-٩)

اثبت وجود مجموعة S في m غير قابلة للعد وعناصرها مكونة من الأرقام 1, 0 فقط.

تمريــن (٦-١٠)

ماهي المسافة في m بين أي نقطتين من المجموعة S المذكورة في التمرين السابق؟

لتكن E مجموعة كثيفة في كل مكان من الفضاء m . سوف نضع المجموعة S (الموضحة في التمرين ٦-٩) في تناظر أحادي مع المجموعة E . هذا سوف يثبت أن E تحتـوي على مجمـوعة غير قابلة للعد وهذا يعني أن E غير قابلة للعد. إذاً m لاتحتوى على مجموعة كثيفة قابلة للعد. لكي نوجد تناظراً أحادياً بين S ومجموعة جزئيه من E ، نأخذ أي نقطة p من S . يوجد نقطة q من E تبعد عن p بأقل من ½ ، لأن E كثيفة في كل مكان. المسافة بين q وأي نقطة أخري s في S أكبر من ½ ، لأن $1 = d(p, s) \leqslant d(p, q) + d(q, s) < ½ + d(q, s)$. بهذة الطريقة، نربط نقطة مختلفة من E مع كل نقطة من S ، وهذا يعني أن عدد نقاط E يساوي عدد نقاط S على الأقل، أي أن E غير قابل للعد.

تمريــن (٦-١١)

برهن بطريقة مشابهة أن الفضاء B (راجع الجزء ٤) غير قابل للفصل.

٧ - التراص (Compactness)

كثيراً مانحتاج إلى القول بأن مجموعة ما، لها نقطة نهاية ولو لم نستطع إيجاد هذه النقطة بالفعل. لنفرض أننا نحاول إثبات أن الدالة f الحقيقية المتصلة والمحدودة والمعرفة على مجموعة E من R_1 لابد وأن تأخذ قيمتها العظمي. بمعني آخر، نريد أن نثبت وجود نقـطة x في E بحيث تكون f(x) مساوية لأصغر حد أعلى للأعداد f(y) حيث y في E . (نفـترض هنـا أن القارىء لديه فكرة عامة عن الدوال المتصلة، التعريف سيعطي في الجزء ١٣). إننا الآن نحاول إثبات وجود x في E بحيث $f(x) \geqslant f(y)$ لكل y في E .

لقد فرضنا أن f محدودة، أي القيم f(y) حيث y في E تكون مجموعة محدودة من الأعداد الحقيقية. هذه المجموعة لها أصغر حد أعلى M ، إذاً $f(y) \leqslant M$ لكل y في E . لابـد إذاً من وجـود نقاط x_n في E بحيث $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$ وإلَّا وجدنا حداً

أعلى أصغر من M . كذلك يمكننا أن نفرض للسبب نفسه أن جميع x_n مختلفة إذا كانت E مجموعة غير منتهية (إذا كانت E منتهية فلايوجد مانثبته). إذا كانت x في E نقطة نهاية للنقاط x_n فإن $f(x) \geqslant M$ لأن $f(x_n) \geqslant M - \frac{1}{n}$. بما أن $f(x) \leqslant M$ حسب تعريف M . إذاً $f(x) = M$.

الآن متى نستطيع القول بوجود نقطة نهاية في E لمجموعة $\{x_n\}$ مكونة من عدد لانهائي من نقاط E ؟ هذا ليس صحيحاً دائماً: فمثلا في R_1 ، المجموعة $E_1 = \{1/2, 1/4, 1/8, \ldots\}$ لها نقطة نهاية 0 ، ولكن هذه النقطة ليست في E_1 . ايضا $E_2 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ليس لها نقطة نهاية في R_1 على الإطلاق. **نظرية بولزانو فيرشتراس (Bolzano-Weierstrass theorem)** تزودنا بشروط بسيطة تضمن أن مجموعة ما، تحوي نقطة نهاية. **النظرية تنص على أن أى مجموعة لانهائية ومحدودة في R_1 ، لها نقطة نهاية في R_1** ؛ إذاً كانت المجموعة مغلقة أيضاً فإنها تحتوي على نقطة نهاية. إذا افترضنا صحة هذه النظرية فإننا نرى أن **أي دالة حقيقية متصلة ومحدودة تأخذ قيمتها العظمى على أي مجموعة محدودة ومغلقة في R_1** . الأمثلة $f(x) = x$ حيث $E = R_1$ ، و $f(x) = \frac{1}{x}$ حيث $E = (0, \infty)$ تدل على أن المجموعة لابد أن تكون مغلقة ومحدودة في نفس الوقت. (سنري الآن أن شرطنا بخصوص محدودية الدالة لالزوم له، حيث إنه يلزم من الفرضيات الأخرى).

تمرين (٧-١)

استنتج الجملة السابقة من نظرية بولزانو - فيرشتراس.

الآن نبرهن نظرية بولزانو - فيرشتراس بطريقة اقترحت لصيد أسد في الصحراء الكبري. نحيط الصحراء بسور، ثم نقسم الصحراء بسور من الشمال إلى الجنوب. الأسد موجود في أحد هذين النصفين، نقسم هذا النصف بسور من الشرق إلى الغرب. الأسد الآن في أحد الربعين، نقسم هذا الربع بسور . . وهلم جرا: في النهاية نحضر الأسد في منطقه صغيرة.

النقطة الأساسية في تطبيق هذه الفكرة على المسألة التي لدينا هي إذا كانت E مجموعة لانهائية وتقع داخل فترة نهائية I ، فإن أحد أنصاف I على الأقل يحوي عدداً

لانهائيا من النقـاط . ليكن I_2 أحد أنصاف I التي تحوي عدداً لانهائيا من نقاط E . نقسم I_2 وأحـد أنصافها يحوي عدداً لانهائيا من نقاط E ، نسميه I_3. نكرر هذه العملية وسـوف نحصل على متتالية من الفترات المتداخلة ... ,I_2, I_3 كل منها يحوي عدداً لانهائيا من نقـاط E . الأطـراف اليسرى للفـترات I_n تكـون مجمـوعـة من النقـاط محدودة من أعـلى (لأنها في I) ولـذا فلهـا أصغـر حد أعلى x . كل جوار للنقـطة x يحتوي على فترة I_n لان طول I_n يؤول الي الصفر ولذا فهو يحوي عدداً لانهائيا من نقاط E . إذاً x نقطه نهايه للمجموعة E .

تمريـن (٧-٢)

برهن نظرية بولزانو - فيرشتراس في R_2 .

كتـطبيق لنـظرية بولزانو - فيرشتراس وعدم قابلية الأعداد الحقيقية للعد، سوف نبرهن نظرية حول تقـريب دالـة بواسـطة المجـاميع الجـزئية لسلسلة قواها (power series) . لتكن $f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_k x^k$ حيث المتوالية تتقارب في $|x| < 1$. افرض أن f(x) تتطابق مع مجموع جزئي لسلسلة القوى لكل نقطة x من $[0, 1)$ ، بمعنى أن لكل x ، يوجد n بحيث

$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = 0$. إذن f كثيرة حدود. [٣]

اجعل E_n مجموعة للنقاط في $[0, \frac{1}{2}]$ بحيث $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x)$. لاحظ أن الأرقام n قابلة للعد بينها النقاط في $[0, \frac{1}{2}]$ غير قابلة للعد، من هذا نستنتج أن أحد المجموعات E_n غير قابلة للعد ولذا فهي غير نهائية . إذن E_n لها نقطة نهاية في $[0, \frac{1}{2}]$ والدالة f تتطابق مع كثيرة حدود على E_n. ولكن الدالة التحليلية لايمكن أن تتطابق مع كثيرة حدود على مجموعة لها نقطة نهاية داخل فترة التقارب بدون أن تكون هي نفسها كثيرة حدود.

الجملة القائلة بأن كل مجموعة محدودة وغير منتهية لها نقطة نهاية جملة لها معنى في كل فضاء متري إلاَّ إنها قد لاتكون صحيحة. فمثلا الجملة غير صحيحة في الفضاء المكون من النقاط القياسية في R_1 بمسافة R_1 . نرى هذا بسهولة إذا أخذنا

المجمـوعة المكونة من التقريبات القياسية $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$ to $\sqrt{2}$. هذه المجموعة محدودة ومغلقة (حيث إن $\sqrt{2}$ لاينتمي للفضاء)، ولكن المجموعة لاتحوى نقطة نهاية . نظرية بولزانو - فيرشتراس تحقق هذا لأن نقاط الفضاء قليلة . ويمكن أن تخفق النـظرية بسبب كثرة النقاط أيضاً . فمثلاً، خذ الفضاء B الذى نقاطه دوال محدودة على $[0, 1]$. لقد رأينا كيف يمكن إنشاء عدد لانهائي من هذه الدوال تبعد كل منها الوحدة عن الأخرى، هذه المجموعة في B لايمكن أن تحتوى على نقطة نهاية .

إذا كانت كل مجموعة جزئية لانهائية في E تحوى نقطة نهاية في E فإننا نقول إن E متراصــة، لقـد رأينا أن المجموعات المغلقة والمحدودة في R_1 أو R_2 تتمتع بهذه الخـاصية . ولكن كلمـة متراص تطلق الآن على مجمـوعـات تتمتـع بخاصية أكثر شمولاً . نقول إن مجموعة متراصة إذا أمكن الحصول على غطاء نهائي من أى مجموعة من المجموعات المفتوحة التي تغطي المجموعة (نقول إن E مغطاة من قبل مجموعة المجموعات $\{G\}$ إذا كانت كل نقطة من E تقع في مجموعة واحدة من G على الأقل) .

لكي نرى كيف يمكن استخدام خاصية التراص، سوف نستعملها لإثبات **أن الدالة الحقيقية المتصلة f والمعرفة على مجموعة متراصة E في فضاء متري تأخذ قيمتهـا العظمى على E** . في البداية نثبت أن الدالة محدودة . نعين لكل نقطة x في E، جواراً N مركزه x بحيث $f(y) < f(x) + 1$ لكل y في N . هذا ممكن لأن f متصلة وقيمتهـا لاتتغـير كثيراً إذا كان تغير x صغيرا . هذه الجوارات مجموعات مفتوحة وكل x في واحـد منهـا، وحيث إن E متراصة يوجد عدد نهائي من هذه الجوارات تغطي E . لتـكـن هذه $N_1, N_2, \ldots, N_n$. إذا كانـت x_k مركـز N_k فإن $f(x)$ لاتتعــدي القيمة العظمي للمجموعة المنتهية من الأعداد $f(x_k) + 1$ إذن f محدودة من أعلى . بنفس الطريقة، f محدودة من أسفل .

الآن نفرض أن f لاتأخذ قيمتها العظمى على E ونستخلص تناقضاً من ذلك . لقد رأينا أن القيم $f(x)$ حيث x في E تكون مجموعة محدودة، إذن المجموعة لها أصغر حد أعـلى M، ونحن نفـرض أن f لاتأخذ هذه القيمة . لكل x نعين الجوار N بحيث $f(y) < f(x) + \frac{1}{2}(M - f(x))$ لكـل y في N . يوجـد عدد نهائي من هذه الجوارات

التي تغطي E . اجعل M' (أصغر من M) أكبر قيم $f(x_k)$ حيث x_k $N_1, N_2, \ldots, N_n$ مركز N_k . إذن إذا كانت y في E و x_k تنتمي إلى N_k التي تنتمي إليها y فإن :

$$f(y) \leqslant f(x_k) + \tfrac{1}{2}(M - f(x_k)) = \tfrac{1}{2}f(x_k) + \tfrac{1}{2}M < \tfrac{1}{2}(M' + M).$$

إذن القيم $f(y)$ حيث y في E لها الحد الأعلى $\tfrac{1}{2}(M' + M)$ وهذا أقل من M ، الأمر الذي يناقض كون M أصغر حد أعلي للدالة f .

تمريـن (٧-٣)

إذا كانت E مجموعة في R_1 ومغطاة بعدد نهائي من الفترات المفتوحة، فإنه بإمكاننا تخفيض عدد الفـترات بحيث لاتنتمي أي من نقـاط E إلى أكثر من فترتين وهذه الفترات المخفضة تغطي E أيضاً.

تمريـن (٧-٤)

برهن أن المجموعة المغلقة من مجموعة متراصة تكون متراصة. البرهان السابق يوحي بأهمية التعرف على المجموعات المتراصة. هذا سهل في R_1 : **نظرية هاين - بوريل (Heine-Borel theorem) تنص على أن المجمـوعـة في R_1 متراصة إذا كانت مغلقة ومحـدودة**. البرهان شبيه ببرهان نظرية بولزانو - فيرشتراس. نفرض أن نظرية هاين بوريل غير صحيحـــة. إذن يوجـــد مجمـــوعـة E مغلقـة ومحـدودة ومجمـوعـة من المجمـــوعـــات المفتـــوحـة $\{G\}$ التي تغـطي E ولايوجـد أي عدد نهائي من هذه المجموعات يغطي E . المجموعة E تقع داخل فترة نهائية I ؛ نصف I . جزء E الواقع في أحد نصفي I لايمكن تغطيته بمجموعة نهائية من G ، حيث إذا أمكن تغـطية جزئي E أمكن تغطية E كلها. لنسم هذا النصف من I ، I_2. الآن نصف I_2 وكـرر العملية. مثـل ما وجدنا مع نظرية بولزانو - فيرستراس، كل جوار للنقطة x يحوي فترة I_n والتي تحوي بدورهـا جزءا من E لايمكن تغـطيته بواسطة مجموعة نهائية من المجموعات G (ولذا فهو لانهائي). النقطة x في E حيث E مغلقة ولذا فهي مغطاة بأحد المجموعات G . بما أن G مفتوحة فإنها تحوي جواراً لـ x وهذا الجوار

يحوي فترة I_n إذا كانت n كبيرة بصورة كافية. جزء E في الواقع I_n هذه، مغطى بعدد نهائي (أي واحد) من المجموعات G . وهذا تناقض يثبت صحة نظرية هاين - بوريل.

تمريـن (٧-٥)

برهن نظرية هاين - بوريل في R_2.

قد يلاحظ القارىء تشابه الشروط على المجموعة في كل من نظرية هاين - بوريل ونظرية بولزانو - فيرشتراس. تشابه كل من الشروط والبراهين يوحي بوجود علاقه وثيقة بين النظريتين. في الحقيقة، إذا كانت إحداهما صحيحة في فضاء متري فالأخري صحيحة، ولكننا لن نبرهن هذه الحقيقة.[٤]

تمريـن (٧-٦)

اثبت مباشـرة أن نظرية هاين - بوريل غير صحيحة للمثالين (٧-١)، (٧-٢) حيث تتحقق نظرية بولزانو - فيرشتراس.

تمريـن (٧-٧)

في الفضـاء R_1، خذ الفـترة E المكـونة من $[0, 1)$. اربط كل x بالفترة المفتوحة $(\frac{1}{2}x, 2x)$. هذه الفـترات تعطي E . برهن عدم وجود غطاء نهائي للمجموعة E واشـرح لماذا لاتناقض هذه الحقيقة نظرية هاين - بوريل.

تمريـن (٧-٨)

المجمـوعـة $[0, \infty)$ في R_1 مغـطاة بواسـطة الفـترات المفتـوحـة $(n - 1, n + 1)$ حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$. لايوجد عدد نهائي من هذه الفترات يغطي المجموعة. وضح لماذا لايتعارض هذا مع نظرية هاين - بوريل.

تمريـن (٧-٩)

المجمـوعـة E في R_1 المكـونـة من الأعـداد القياسية في $(0, 1)$ غير مغلقة. يمكن

تغطيتها بمجموعات مفتوحة على النحو التالي: نغطي النقطة x بفترة مفتوحة طولها $1/10$ مركـــزهـا x . يوجـد غطاء نهائي لـ E من هذه الفـترات المفتـوحـة. اشـرح لماذا لاتناقص هذه الحقيقة نظرية بولزانو - فيرشتراس.

تمريـن (٧-١٠)

لتكن المجموعة E في R_1 هي الفترة المغلقة $[0, 1]$. غط كل من $x \neq 0$ في E بالفترة $[1/2x, 2x]$ وغط النقطة 0 بالفترة $[0, 0.1]$. هذه الفترات المغطية غير مفتوحة ولكن يوجد غطاء نهائي فيها لـ E . وضح لماذا لايتعارض هذا مع نظرية هاين - بوريل.

تجدر الإشارة إلى أنه بالإضافة إلى كون كل مجموعة جزئية من R_1 أو R_2 متراصة إذا كانت محدودة ومغلقـة فإن أي مجمـوعـة متراصة لابد أن تكون مغلقة ومحدودة. لإثبـات هذا، نفـرض أن E مجمـوعة متراصة غير خالية في R_1. هذه المجموعة لايمكن أن تكون R_1 بكاملها، إذن مكملتها لابد أن تحوي x . خذ جميع الفترات المنتهية المفتوحة G بحيث لايحوي إغلاقها النقطة x . يوجد بين فترات G ، جوارات لكل نقطة من E لأنه إذا كانت $y \in E$ فالجوار حول y الذي يصل فقط إلى منتصف المسافة إلى x لن يحوي x في إغلاقه. إذن E مغطاة بالمجموعات المفتوحة G . وحيث إن E متراصة فإنه يوجد غطاء نهائي من G وليكن $G_1, \ldots, G_n$. إذن E محدودة لأنها داخل اتحاد عدد نهائي من الفترات المنتهية. وبما أن إغلاقات $G_1, G_2, \ldots, G_n$ لا تحوي x فإن مكملات هذه الإغلاقات جميعا تحوي النقطة x وعليه فإن x تقع في تقـاطعهـا. إغـلاقـات المجمـوعات G_k مغلقة والمكملات مفتوحة وعلية فتقاطع المكمـلات مفتـوح. إذن x تنتمي لمجمـوعـة مفتوحة في $C(E)$ وحيث إن x نقطة اختيارية من $C(E)$ فإن كل نقطة من $C(E)$ تقع داخل مجموعة مفتوحة من $C(E)$. إذن $C(E)$ مفتوحة (تمرين ٥-١٥) وكذلك E مغلقة (تمرين ٥-١٨)،

٨ - التقارب والكمال (Convergence and Completeness)

يعني جزء كبـير من التحليل الـرياضي بمتتـاليات وسلاسل الدوال. ولكن مفهوم السلسلة الـلانهائية العـددية أبسط. فمثلاً نكتب $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ وهذا يعني

أننا نجمع الحدود واحداً تلو الآخر ونكون المجاميع الجزئية.

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8},\ \ldots$$

ونسمي نهاية هذه المتتالية (إن وجدت) **مجموع السلسلة اللانهائية**. (نفترض هنا أن القارىء ملم بمبادىء مفهوم النهاية). في هذه الحالة، المجاميع هي $\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}, \ldots$ ويتضح من هذا أن مجموع السلسلة هو 1. تكون المعالجه أوضح إذا استخدمنا قانون مجموع المتوالية الهندسية:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \tfrac{1}{2}} = 1 - 2^{-n}.$$

بشكل عام، إذا كتبنا السلسلة اللانهائية

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

فإننا نحسب المجاميع الجزئية a_1 ثم $a_1 + a_2$ ثم $a_1 + a_2 + a_3$، وهلم جرا ونسمي نهاية هذه المتتالية من المجاميع (إن وجدت) **مجموع السلسلة**. لاحظ، مثلاً، أن $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ و $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$ سلسلتان مختلفتان لأن المجاميع الجزئية للأولى هي $1, 0, 1, 0, \ldots$ بينما مجاميع الثانية جميعها تساوي صفر.

في الحقيقة أننا لم نعرف بعد «السلسلة اللانهائية»: لقد اقترحنا فقط طريقة لإعطاء قيمة عددية لكمية لم تكون معرفة من قبل. لكي نعطي تعريف نلاحظ أن ما استعملناه في الحقيقة ما هو **إلاَّ متتالية من المجاميع الجزئية**. في الواقع أن المتتالية دالة من الأعداد الطبيعية الموجبه إلى فضاء ما: انظر الجزء ١٢ • ولكن نستطيع أن نعتبر متتالية من الأعداد، مجموعة من الأعداد رقمت بواسطة الأرقام الموجبة حسب ترتيبها، الأعداد قد لاتكون مختلفه فمثلاً $1, 0, 1, 0, \ldots$ متتالية (حيث الترقيم مفهوم ضمنيا)؛ وبشكل عام نكتب المتتالية على الشكل $a_1, a_2, \ldots$ أو $\{a_n\}_1^\infty$ أو بصورة أبسط $\{a_n\}$. يجب أن نفرق بين المتتالية وبين المجموعة المكونة من عناصرها. أي مجموعة لأنهائية قابلة للعد يمكن ترتيبها في متتالية (بعدة طرق) ولكن المتتالية لاتحتاج إلى أكثر

من عدد نهائي من الأعـداد المختلفة. (لاحظ أن «المتتالية المنتهية» مثل $\{5, 12, 13\}$ ليست متتـالية حسب تعريفنا). الآن نعرف السلسلة اللانهائية $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ على أنها المتتالية التي عناصرها المجاميع الجزئية

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

وهلم جرا.

وبـالعكس، كل متتـالية من الأعـداد تعـرف سلسلة لانهائية بحيث تكون الأعـداد هي المجاميع الجزئية. فمثلاً، المتتالية $1, 0, 1, 0, \ldots$ هي متتالية المجاميع الجزية للسلسلة $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. بشكل عام، المتتالية $s_1, s_2, s_3, \ldots$ هي متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \ldots$.

إن مفهوم المتتالية أعم من مفهوم السلسلة لأننا نستطيع الحصول على متتالية عناصرها مجموعات أو أي نقاط في أي فضاء، ولكن لايوجد سلسلة إلاَّ إذا كانت عملية الجمع معرفة على نقاط الفضاء.

من الطبيعي أن نقول أن السلسلة اللانهائية متقاربة إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة وإلاَّ فإن السلسلة متباعدة. لكي نجعل هذا التعريف دقيقاً، علينا أن نعـرف ماذا يعني تقارب متتالية. إذا كانت $\{s_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية، نقول إنها تؤ ول إلى النهـاية L إذا أمكن جعـل $|s_n - L|$ صغيراً حسب ما نريد لكل قيم n الكبيرة. عندئذ نكتب $s_n \to L$. بأسلوب أدق، نكتب $s_n \to L$ إذا وجد رقم N لكل عدد حقيقي موجب ϵ (مهما كان صغيراً) بحيث $|s_n - L| < \epsilon$ عندما $n > N$. يمكن تعميم هذا التعريف بصورة مباشـرة إلى متتاليات عناصرها نقاط في أي فضاء متر ي: ما علينا إلاَّ أن نستبدل $|s_n - L|$ بالكمية $d(s_n, L)$. فمثلاً المتتالية $\left\{\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right), \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}$ في R_2 تؤ ول إلى $(1, 0)$؛ وكذلك إذا كانت العناصر x_n في الفضاء C معرفة كالتالي x_n حيث $x_n(t) = t^n(1 - t)^n$ حيث $0 \leqslant t \leqslant 1$ فإن المـتـتــالـية $\{x_n\}$ تؤ ول إلى الـعنصر 0 في C (حيث أن $t(1 - t) \leqslant 1/4$).

مع أن تعـريف السلسلة $a_1 + a_2 + ...$ على أنها متتـالية المجـاميع الجزئية $\{s_1, s_2, s_3, ...\}$ يبدو معقولاً إلاَّ أن هناك تعاريف أخرى مفيدة أيضا. فمثلاً أحياناً نعرف $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ بأنها المتتالية

$$\frac{s_1}{1}, \frac{s_1 + s_2}{2}, \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3}, ...$$

أو

$$\frac{s_1 + s_2}{2}, \frac{s_2 + s_3}{2}, \frac{s_3 + s_4}{2}, ...$$

بالإمكـان البرهان على أن أياً من هذه التعاريف يحافظ على مجموع أي سلسلة متقاربة.(٥) كذلك هذه التعاريف قد تجعل بعض السلاسل المتباعدة، متقاربة؛ فمثلا السلسلة المتباعدة $1 - 1 + 1 - 1 + ...$ مجاميعها هي $s_1 = 1$ ، $s_2 = 0$ ، $s_3 = 1$ ،

وهكذا، إذن أي من التعريفين يجعل السلسلة متقاربة بالمجموع $\frac{1}{2}$.

الآن نفحص بعض خواص متتـاليات النقـاط في فضاء متري؛ لقد مهد مفهوم السلسلة اللانهائية لمفهوم المتتالية، ولكننا لن نستعمل السلاسل اللانهائية في الوقت الحاضر.

إذا كانت متتالية تؤول إلى النهاية L فإن عناصرها تقترب من بعضها البعض وتبقى كذلك في آخر الأمر. لنجعل N كبيرة بحيث لكل $n > N$ نجد أن $d(s_n, L) < \frac{\epsilon}{2}$ ، لتكن $m > N$ ، إذاً $d(s_m, L) \leq \frac{\epsilon}{2}$ أيضـاً. من المتراجحة المثلثية نجد $d(s_m, s_n) \leq d(s_n, L) + d(s_m, L) < \epsilon$. أي يمكن جعـل المسافة $d(s_m, s_n)$ صغيرة كما نشاء إذا أخذنا كلاً من m و n كبيرة بصورة كافية.

إذا كانت متتاليه $\{s_n\}$ تحقق الخاصية أن عناصرها تقترب من بعضها وتبقى كذلك كما وضحنا قبل قليل فإنها **تسمى متتالية كوشي (Cauchy Sequence)** ونقول إنها متقاربة. هذه المتتالية قد تؤول أو لاتؤول إلى نهاية في الفضاء. فمثلاً، في الفضاء المتري المكون من الأعداد النسبية بمسافة R_1، المتتالية

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ...\}$$

والمؤلفـة من التقريبات العشرية للعدد $\sqrt{2}$ متقاربة . في الحقيقة ، إذا كانت $m > N$ و $n > N$ فإن s_n, s_m تتـطابـق على الأقـل إلى الخـانـة الـعشرية N ولـذا فإن $|s_m - s_n| < 10^{-N}$. ومع ذلك ، المتتالية لاتؤول إلى نقطة في الفضاء .

الفضاء المتري الذي كل متتالية كوشي فيه تؤول إلى نقطة في الفضاء **يسمى فضاء كامل (Complete)** . فضاء الأعداد النسبية غير كامل . لكن الفضاء R_1 كامل كما سنرى بعد قليل . في الحقيقة ، نستطيع دائما أن نجعل أي فضاء متري كاملاً بإضـافة نقاط جديدة إليه لنحصل على فضاء أكبر مثل ما ننشىء الأعداد الحقيقية من الأعداد النسبية . لن نناقش بناء الأعداد الحقيقية من النسبية هنا .[٦]

الآن نبرهن أن كمال الفضـاء R_1 ينتـج من خاصية أصغـر حد أعـلى التي افترضناها . اجعل $\{s_n\}$ متتالية كوشي . إذا كان ϵ عدداً حقيقياً موجباً اختيارياً فإنه يوجد رقم N بحيث إن $|s_m - s_n| < \epsilon$ إذا كان $n > N$ و $m > N$. في المقام الأول ، القيم المختلفة s_n تكون مجموعة محدودة . لنري هذا ، خذ $\epsilon = 1$ ، اوجد N المرافقة وخـذ $m > N$. إذن $s_n = s_m + (s_n - s_m)$ ومنـه نجد أن $|s_n| \leqslant |s_m| + 1$ إذا كانت $n > N$. بما أن المجموعة النهائية $\{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ محدودة فإن المجموعة المكونة من الأعداد s_n محدودة أيضا .

اجعـل L_k أصغـر حد أعـلى للمجمـوعـة المكـونة من جميع القيم s_n حيث $n > k$. إذا جعلنـا k كبـيرة فإننـا نأخـذ أصغـر حد أعـلى لمجمـوعـة أصغر من الأعداد . إذن $L_k \geqslant L_{k+1} \geqslant \ldots$. اجعل L أكبر حداً أدني للمجموعة المكونة من جميع L_k . سنثبت أن $s_n \to L$. خذ ϵ أي عدد موجب وخذ N المرافقة له بحيث $|s_m - s_n| < \epsilon$ إذا كانت $n > N$. من تعـريف أكـبر حد أدنى ، يوجـد L_k حيث $k > N$ ، بين L و $L + \epsilon$. بما أن L_k أصغـر حد أعـلى للمجموعة المكونة من s_n حيث $n > k$ ، فإنــه يوجـد s_m (حـيث $m > k$) بين $L_k - \epsilon$ و L_k ؛ إذاً $L - \epsilon \leqslant s_m \leqslant L + \epsilon$. بما أن s_n تبـعـد عن s_m بمسـافـة ϵ على الأكثـر فإن $L - 2\epsilon \leqslant s_n \leqslant L + 2\epsilon$. بما أن 2ϵ اختياري مثـل ϵ فهـذا يعني أن بالإمكان

جعــل s_n قريباً بصـورة اختيارية من L إذا جعلنـا n كبـيرة بصـورة كافية، إذاً $s_n \to L$.

تمريـن (٨-١)

برهن أنه بالإمكان استنتاج خاصية أصغر حد أعلى من كمال الفضاء R_1.

تمريـن (٨-٢)

إذا كانت $\{s_n\}$ متتالية من نقاط R_1 بحيث إن $s_n \leqslant s_{n+1}$، و $s_n \leqslant M$ لكل n فإن $\{s_n\}$ متقـاربة. بمعني آخر، المتتالية المتزايدة والمحدودة لها نهاية (هذه تؤخذ أحيانا كالصيغة الأساسية للكمال في R_1).

تمريـن (٨-٣)

برهن أن R_2 كامل.

سوف نرى في الجزء (١٧) أن الفضاء C كامل، وبشكل عام، فضاء الدوال المتصلة على أي مجموعة متراصة، كامل.

لقد لاحظنا في (تمرين ٤-٢) أن أي مجموعة جزئية من فضاء متري تكون فضاءا متر ياً (إذا استعملنا نفس المسافة).

تمريـن (٨-٤)

المجموعة الجزئية من فضاء متري كامل قد لاتكون فضاء متر ياً كاملاً. اعط مثال على هذا.

الآن نبرهــن أن أي مجمــوعــة جزئـيــة E مغـلقــة وغــير خاليــة في فضـــاء متري كامـــل S تكــون فضـــاء متريـــاً كامـــلاً (كـــالعـــادة، نستعمـل المســافــة الأصـلية). لتـكـن $\{x_k\}$ متتــالية كوشي في E. هذه متتــالية كوشي في الـفـضــاء S أيضــاً لأن المـســافــة في E و S واحــدة. بما أن S كامــل، إذاً $x_k \to x_0$ حيث $x_0 \in S$. ماعــلينــا الآن إلاَّ أن نثـبــت أن

$x_0 \in E$. هناك حالتان بجب فحصهما. في الحالة الأولى، جميع حدود المتتالية متطابقة ماعدا عدد نهائي. في هذه الحالة تتطابق الحدود مع x_0 ، أي أن $x_0 \in E$. في الحالة الثانية، يوجد عدد لانهائي من الحدود المختلفة. إذاً $x_k \to x_0$ يعني أن x_0 نقطه نهاية للمجموعة المكونة من الحدود x_k ، أي أن x_0 نقطة نهايه للمجموعة E . بما أن E مغلقة، إذن فهي تحوي نقاط نهاياتها. إذن $x_0 \in E$.

علينا أن نميز بين نهاية متتالية ونقطة نهاية للمجموعة المكونة من عناصر المتتالية المختلفـة. فمثلاً، المتتالية $\{0, 0, 0, ...\}$ في R_1 لها النهاية 0 ، ولكن مجموعة عناصر المتتـالية تتـألف من نقطة واحدة ولذا فليس لها نقطة نهاية. على العكس من ذلك، مجموعة عناصر المتتالية $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, ...\}$ في R_1 لها نقطتا نهاية 1, 0 ولكن المتتـالية ليس لها نهاية. ضرورة التمييز هو ما جعلنـا نأخذ الحالتين في البرهان السابق.

ومع ذلك يوجد ترابط وثيق بين مفهوم نهاية متتالية ونقاط نهاية المجموعة المكونة من عناصر المتتالية.

تمريـن (٨-٥)

لدينا متتالية تؤول إلى L وبها عدد لانهائي من الحدود المختلفة، برهن أن مجموعة عناصر المتتالية لها نقطة نهاية وحيدة وهي L .

تمريـن (٨-٦)

إذا كانت متتالية تؤول إلى نهاية وعناصرها تنتمي إلى مجموعة مغلقة، برهن أن نهاية المتتالية تنتمي إلى المجموعة نفسها.

تمريـن (٨-٧)

إذا كانت E مجموعة متراصة غير خالية في R_1 فإن فيها عنصر أكبر.

قد يبـدو من تمرين (٨-٥)، أنـه إذاً كانت متتالية متقاربة فإن نهايتها تصبح نقـطة نهاية لمجموعة عناصر المتتالية. ومن ناحية أخري، نلاحظ أنه **إذا كانت L نقطة**

نهايـة لمجمـوعـة E فإنه يوجد متتالية من نقاط E تؤول إلى L . في الحقيقة يوجد نقطة x_1 في E على بعـد أقـل من 1 من L ؛ كذلـك يوجـد x_2 تبعـد عن L بأقـل من ½ وهكذا. في أغلب الأحيان، تتألف E من عناصر متتالية، وإذا كان لهذه العناصر نقـطة نهاية فلابد من وجود متتالية جزئية تؤول إلى نقطة النهاية. هذا هو مبدأ **المتتالية الجزئية (Subsequence principle)** وله استعمالات كثيرة.

تمريـن (٨-٨)

لتكن E متتالية محدودة في R_2، برهن أن E تحوي متتالية جزئية متقاربة واحدة على الأقل (هذا نظير نظرية بولزانو - فيرشتراس للمتتاليات).

الآن نعطي مثالاً على استعمال مبدأ المتتالية الجزئية. سوف نناقش مفهوم قطر مجموعة E . **القطر (Diameter)** هو أصغر حد أعلى للمسافات بين نقاط E ؛ ونكتب $\text{diam } E = \sup d(x, y)$ حيث y, x في E . فمثلاً قطر الدائرة التي نصف قطرها 1 يسـاوي 2 ؛ هذا العـدد نفسه هو قطر المنطقة المفتوحة داخل الدائرة وقطر المنطقة المغلقـة أيضـا. قطر المجمـوعة المكونة من النقاط الثلاث $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ يساوي $\sqrt{2}$. لاحظ أنه قد لا يوجد نقاط y, x في E بحيث $d(x, y) = \text{diam } E$ حتي ولـوكـانت E محدودة. فمثلاً إذا كانت E جواراً في R_2 فإنه لايوجد نقاط في E تبعد عن بعضها بالمسافة $\text{diam } E$.

ولكن يوجـد مثل هذه النقاط إذا كانت E مجموعة متراصة غير خالية في R_1 أو R_2 . الـبرهــان كالتــالي. لنفــرض عدم وجــود النقــاط y, x في E بحيث $d(x, y) = \text{diam } E$. من تعــريف الـقــطر لابــد من وجــود أزواج من النقــاط $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots$ حيث إن $d(x_n, y_n) > \text{diam } E - \frac{1}{n}$. يوجـد عدد لانهائي من قيم x_n و y_n المختلفـة (وإلاّ وجدنا x و y بحيث $(d(x, y) = \text{diam } E)$. إذا وجد عدد لانهائي من قيم x_n المختلفـة فلابد من وجود نقطة نهاية لها (بواسطة نظرية بولزانو - فيرشـتراس) وبإمكاننا أن نختار متتالية جزئية تؤول إلى نقطة النهاية هذه. إذا لم يوجـد إلاّ عدد نهائي من القيم المختلفـة لـ x_n فلابـد أن يتكـرر واحـد منهـا ولتكن x_1 عدداً لانهائيا من المـرات ولـذا فالمتتـالية التي جميع عنـاصرهـا تسـاوي x_1 سوف

تؤول إلى x_1. نعمـل نفس الشيء مع y_n المـرافقـة لـ x_n. نحصل على متتاليات نسميها $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ وذلك من أجل سهولة الرموز، بحيث $x_n \to x_o$ و $y_n \to y_o$ و $d(x_n, y_n) \to \text{diam } E$. إذن لابـد أن يكـون $d(x_o, y_o) = \text{diam } E$ ، لأن $d(x_o, y_o)$ لايمـكـن أن يتـعـدي $\text{diam } E$ لأن E مغـلقـة ولـذا فإن x_o و y_o في E . كذلك المتراجحة المثلثية تعطينا

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0) + d(x_0, y_0)$$

إذن $\text{diam } E \leqslant d(x_o, y_0)$.

تمريـن (٨-٩)

عرف المسافة بين مجموعتين F و G على أنها $\inf d(x, y)$ حيث x في F و y في G . افـرض أن F و G في R_2 مغلقتين وغير خاليتين وأن F محدودة. برهن على وجود النقاط x في F و y في G بحيث إن $d(x, y)$ هي المسافة بين F و G .

تمريـن (٨-١٠)

إذا كانت N جواراً للنقـطة y مكونة من جميع النقاط x بحيث $d(x, y) < r$ فهل يكون $\text{diam } N = 2r$ ؟ (خذ أولاً R_1 أو R_2 ثم خذ فضاء متر ياً عاماً).

تمريـن (٨-١١)

برهن أن E وإغلاقها لهما نفس القطر.

٩ - المجموعات المتداخلة ونظرية بير (Baire)

افـرض أن لدينـا مجموعتين E_1 و E_2 حيث $E_1 \supset E_2$ و E_2 ليست خالية. إذن يوجد نقـطة واحـدة على الأقل في كلتيّ المجموعتين حيث إن $E_1 \cap E_2 = E_2$. كذلك، إذا كان لدينـا **عدد نهائي من المجمـوعات المتداخلة (nested sets)** $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E_n$ والمجمـوعـة الأخيرة E_n غير خالية، فلابد من وجود نقطة واحدة مشتركة بين جميع

المجموعات. لايوجد ما يناظر هذا في حالة عدد لانهائي من المجموعات المتداخلة غير الخالية، تقاطع هذه المجموعات قد يكون خالياً. خذ الأمثلة الثلاثة التالية:

(أ) E_n هي الفترة المفتوحة $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ في R_1.

(ب) E_n هي مجموعة النقاط في فضاء الأعداد القباسية من R_1 بحيث $|x - \sqrt{2}| < \frac{1}{n}$.

(جـ) E_n هي الفتره $[n, \infty)$ في R_1. جميع

في كل من هذه الحالات، تقاطع جميع المجموعات E_n خال.

الآن نضـع بعض الشروط التي تضمن أن تقـاطع مجموعة من المجموعات المتـداخلة غير خال. **نظريـة كانتـور للمجمـوعات المتداخلة (Cantor's nested set theorem) تنص على أنه إذا كانت $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ والمجموعات E_n مغلقة غير خاليـة وكـان الفضاء كاملاً وكذلك $\text{diam } E_n \to 0$ فإنه يوجد نقطة وحيدة في تقاطع جميع المجموعات E_n.**

لاحظ أن نظرية كانتـور تشترط ثلاثة شـروط بالإضافة إلى أن المجموعات متداخلة وغير خالية: الإغلاق والقطر الصغير للمجموعات وكمال الفضاء.

في كل من أمثلتنا الثلاثة حيث تقاطع المجموعات المتداخلة خال، نجد أن واحداً من الشروط لايتحقق.

لكي نبرهن نظرية كانتور، خذ x_n في E_n. المتتالية $\{x_n\}$ متتالية كوشي لأنه إذا كانت $m > n$ فإن $x_m \in E_n$ و $d(x_n, x_m) \leqslant \text{diam } E_n$ ونحن نعرف أن $\text{diam } E_n$ يؤ ول للصفر. بما أن الفضاء كامل، إذن فالمتتالية $\{x_n\}$ لها نهاية في الفضاء. إذا اخترنا أي E_n فإن جميع x_k تنتمي إلى E_n إذا كانت $k \geqslant n$، إذن النهاية في E_n لأنها مغلقة. إذن النهـاية في كل E_n. أخيراً، لايمكن وجود نقطتين في كل E_n لأن قطر E_n لايمكن أن يقل عن المسافة بين أي من نقطتين منه.

من المفيد أحيانـاً أن نتعامل مع صيغة النظرية الأضعف التالية: **إذا ابقينا جميع فرضيـات نظريـة كانتـور ما عدا الفـرضية بأن $\text{diam } E_n \to 0$ والتي نستبدلها بأن المجمـوعات E_n متراصة فإننا نستطيع القول بأن تقاطع المجموعات E_n غير خال** (ولكنه قد يشتمل على أكثر من نقطة الآن). بما أننا أبقينا الفرضية بأن E_n مغلقة،

ففي R_k فرضيتنا الجديدة تعني أن E_n محدودة كذلك في الفضاء R_k، النظرية المعممة تصبح نتيجه بسيطة لمبدأ المتتالية الجزئية: المتتالية $\{x_n\}$ المكونه من نقطة من كل مجموعة لها متتالية جزئية متقاربة. نهاية هذه المتتالية هي النقطة المطلوبة.

لكن الحالة العامة تتطلب برهاناً آخر. دعونا نغطي E_1 بجوارات نقاطة بحيث لايزيد قطر أي منهــا عن 1 . بما أن E_1 متراص، إذن يوجــد غطاء نهائـي ولـيكن $N_1, N_2, \ldots, N_p$. أحـد المجموعات N_k لابد أن يحوي نقاط من جميع المجموعات E_n، وإلاَّ فإن كل N_k لاتتقاطع مع واحدة من E_m، أي أنها لاتتقاطع مع جميع E_n حيث $n > m$ (تذكر أن E_n مجموعات متداخلة). إذا كانت N_1 منفصلة عن E_{m_1} و N_2منفصلة عن E_{m_2}، ... إلـخ، فإنـه لايوجـد N_kتحتـوي نقاط من E_nلكل $n > m_o$ حيث m_oاكــبر قيم $m_1, m_2, \ldots, m_p$. بما أن الـمجمــوعـــات N_kتغــطي E_1فهـــذا يعني أن E_1لاتحـوي نقـاط من E_nلكـل $n > m_o$وهـذا يتعارض مع الفرضية أن E_n مجمـوعـات متداخله. هذا التناقض يثبت وجود N_kتحتوي على نقاط من جميع E_n.
إذاً إغـلاق المجمـوعـات $N \cap E_n$هي مغلقـة ومتـداخلة وأقـطارهـا لاتزيد عن 1 . كرر هذه المحـاكمـة مع جوارات اقـطارهـا لاتـزيد عن ½ وتغـطي إغلاق المجموعة $N \cap E_1$؛ ثـم مع جوارات أقــطارهـــا لاتـــزيد عن ⅓ وهـكـــذا. بهذه الـــطريقـــة نحصل على مجموعات متداخلة في E_nوأقطارها تؤ ول إلى الصفر ومن ثم نطبق نظرية كانتور في صيغتها الأصلية.

يمكن أحياناً استعمال نظرية كانتور لإثبات أن مجموعة معينة غير خالية. فمثلاً نستطيع البرهان على وجود دوال أو مجموعات تتمتع بخاصة معينة إذا تمكنا من كتابة هذه الدوال أو المجموعات كتقاطع مجموعات متداخلة تحقق فرضيات نظرية كانتور. ولكن يفضل عدم استعمال المجموعات المتداخلة مباشـرة وإنما نستعمل نظرية أخرى والتي هي نتيجـة لنظرية كانتور. لكي نقدم هذه النظرية الجديدة لابد من تقديم مفهـوم المجمـوعـات التي يمكن تمثيلهـا كاتحـاد عدد قابـل للعـد من المجموعات المخلخلة. هذه المجموعات تسمى مجموعات من **الفئة الأولى (First category)** . بما أن التسمية غير معـبرة، فإننـا أحيانـاً نسمي **هذه المجمـوعات ضئيلة (Meager)** لأسباب ستتضح فيما بعد.

في الفضاء R_1 ، أي مجموعة مكونة من عدد نهائي من النقاط تكون من الفئة الأولى. وكذلك أي مجموعة قابلة للعد، مثل مجموعة الأعداد النسبية. مع أن هذه المجموعة كثيفة في كل مكان إلاَّ أنها تساوي اتحاد عدد قابل للعد من المجموعات كل منها يتكون من عنصر وحيد. بما أن مجموعة كانتور مخلخلة إذن فهي من الفئة الأولى ولكنها غير قابلة للعد. إذا أخذنا اتحاد مجموعة كانتور مع مجموعة الأعداد النسبية فإننا نحصل على مجموعة من الفئة الأولى، كثيفة في كل مكان وغير قابلة للعد. المجموعات التي ليست من الفئة الأولى تكون **من الفئة الثانية** **(Second category)** بما أن المجموعة الخالية مخلخلة، إذن فهي من الفئة الأولى وعليه فأي مجموعة من الفئة الثانية لايمكن أن تكون خالية. هذه النتيجة هي الأساس في استعمال مفهوم الفئة: إذا تمكنا من اثبات أن مجموعة ما، من الفئة الثانية فلابد أن تحوي هذه المجموعة بعض النقاط. نستطيع أحياناً أن نبرز مجموعة أشياء معينة على أنها من الفئة الثانية وهذا يعني وجود مثل هذا الأشياء. سنعطي بعض الأمثلة بعد قليل. الطريقة تعتمد على **نظرية بير** **(Baire's theorem)** **التي تقول إن أي فضاء متري كامل يكون من الفئة الثانية**.

سنعطي بعض الملاحظات قبل أن نثبت النظرية. أولاً، كمال الفضاء المتري ضروري. الفضاء المتري المكون من الأعداد النسبية غير كامل وكل مجموعة مكونة من نقطة واحدة هي مخلخلة والفضاء اتحاد عدد قابل للعد من هذه المجموعات المخلخلة.

لاحظ أننا لانستطيع أن نجزم بأن أي مجموعة قابلة للعد تكون من الفئة الأولى وإن كان هذا يبـدو معقولاً. كما لاحظنا في تمرين (٦-١)، النقطة الواحدة قد لاتكون مجموعة مخلخلة. هذا يحدث مثلاً في أي فضاء يحتوي على عدد نهائي من النقاط. التمرين التالي يوضح الحالة المعاكسة.

تمريـن (٩-١)

برهن أنه إذا كانت جميع نقاط فضاء هي نقاط نهاية فإن أي مجموعة مكونة من نقطة واحدة لابد وأن تكون مخلخلة.

تمريـن (٩-٢)

برهن أن نظرية بير تعني أن R_1 ومجموعة كانتور غير قابلة للعد.

الآن نبرهن نظرية بير. اجعل E_n متتالية من المجموعات المخلخلة في فضاء متري كامل. علينا أن نجد نقطة واحدة على الأقل لاتنتمي إلى أي من المجموعات E_n. أسـاس البرهان هو أنه إذا كانت E_1 مخلخلة فإن مكملتها تحتوي على جوار N_1، N_1 بدوره يحتـوي على جوار N_2 يقـع في مكملة E_2 وفي مكملة E_1، وهلم جرا. بهذه الـطريقة نحصل على متتالية من الجوارات المتداخلة والتي تنفصل أكثر فأكثر عن E_k، ولـذا فإن أي نقـطة مشـتركـة بين جميع N_k لايمكن أن تقع في أي من المجموعات E_k.

لكي نبرهن على وجد تقطة مشتركة علينا أن نستفيد من نظرية كانتور. في البـداية، خذ جوار N_1 في $C(E_1)$. خذ جواراً جزئياً في داخـل الجـوار الأول بحيث لايزيد قطره عن 1 و اجعل M_1 إغلاق هذا الجوار الجزئي. بما أن E_2 مخلخلة، إذن M_1 تحوي جواراً في $C(E_2)$ (وكذلك في $C(E_1)$). اجعل M_2 إغلاق جوار جزئي N_2 قطره لايتعدى ½. نكرر هذه العملية، ونحصل على مجموعات M_k مغلقة ومتداخلة وأقطارها تؤول إلى الصفر وتحقق الخاصية، إن M_k منفصلة عن $E_1, E_2, ..., E_k$. النقطة المشتركة بين جميع M_k هي النقطة المطلوبة لأنها لاتقع في أي من المجموعات E_k.

١٠ - بعض التطبيقات على نظرية بـير

(أ) من خواص التكاملات المكررة (Repeated Integral) :

لتـكـــن f دالـــة حقـيقـية متـصـلة على فترة حقـيقـية مثــل [0, 1]. اجـعـــل f_1 أي تكـــامـــل للدالـــة f و f_2 أي تكـــامـــل لـ f_1 وهـــلم جرا. إذا كان أحـــد التكـامـلات f_k يساوي الصفر على الفترة بكاملها فإن f تساوي صفراً على الفترة: للبرهان ما علينا إلاَّ أن نشتق f_k مراراً. النظرية التالية تعمم هذه النتيجة: **إذاوجـد لكل x، رقم k (قد يعتمد على x) بحيث $f_k(x) = 0$ فإن f تساوي صفراً على الفترة.**

لبرهـان هذه النظرية، اجعل E_k مجموعة النقاط x بحيث $f_k(x) = 0$؛ فرضيتنا

تقـول إن كل x في $[0, 1]$ تقع في إحدى المجموعات E_k . من نظرية بير نستنتج أن E_k لايمكن أن تكـون جميعها مخلخلة. إذن يوجد k بحيث إن إغلاق E_k يملأ فترة نسميها I_k . بالنسبة للقيمة k هذه، f_k متصلة وتساوي صفراً على المجموعة E_k، إذن $f_k(x) = 0$ لكل x في I_k .

إذا لم تكن I_k جميع $[0, 1]$ ، فإننـا نكـرر هذه المناقشه على مايتبقي من $[0, 1]$ وهلم جرا. بهذه الطريقة، نجد أن $f(x) =0$ لجميع قيم x في مجموعة كثيفة في كل مكان؛ وبما أن f متصلة فلا بد أن $f(x) = 0$ لجميع x في الفترة $[0, 1]$.

إن كانت $f(x) \neq 0$ فبغض النظر عن كيفية اختيار التكامل f_k لابد أن يوجد قيمة لـ x (في الحقيقة مجموعة كثيفة في كل مكان) بحيث $f_k \neq 0$ لكل قيم k .

(ب) تمثيل كثيرات الحدود:

خذ دالة متصلة حقيقية f على الفترة $[0, 1]$. إذا كان للدالة f مشتقة نونية تساوي الصفر فبالإمكان أن نبرهن (عن طريق قانون القيمة المتوسطة) أن f تتطابق على $[0, 1]$ مع كثيرة حدود لاتـزيد درجتهـا عن $n - 1$. النظرية التالية تعمم هذه الحقيقة كما عملنـا في فقـرة (أ). **لتكن f دالـة اشتقـاقيـة من جميـع الدرجات على $[0, 1]$ ، وافـرض أنـه عند كل نقطة يوجد مشتقة للدالة f تساوي صفراً، أي لكل x يوجد رقم $n(x)$ بحيث $f^{(n(x))}(x) = 0$. إذن f تتطابق على $[0, 1]$ مع كثيرة حدود.** (٧)

نبـدأ الـبرهـان، بجعـل E_n مجمـوعـة x بحيث $f^{(n)}(x) = 0$. بالفـرض كل x تقـع في إحدى E_n على الأقل. من نظرية بير، يوجد فترة مغلقة I بحيث إن واحـداً من E_n كثيف في كل مكـان. بما أن $f^{(n)}$ متصلة إذن $f^{(n)}(x) = 0$ في I والدالة f تسـاوي كثيرة حدود في I . إذا لم تكن I جميع الفترة $[0, 1]$ فإننا نكرر المحاكمة في الجـزء الباقي من $[0, 1]$ وهلم جرا. بهذه الطريقة نحصل على مجموعة كثيفة في كل مكـان مكـونـة من فترات على كل منها الدالة f تساوي كثيرة حدود. بقي علينا أن نبرهن أن f تساوي كثيرة حدود واحدة على جميع الفترات.

لهذا الغـرض سوف نطبق نظرية بير مرة أخـرى على المجمـوعة المخلخلة H المتبقية عندما نزيل النقاط الداخلية من المجموعة الكثيفة المكونة من فترات من

[0, 1] . علينا أن نبرهن أولاً أن H تامة . في المقام الأول، H مغلقة لأننا حصلنا عليها بإزالة مجموعة من الفترات المفتوحة من فترة مغلقة . افرض أن H غير تامة وليس فقط الـزوج {0, 1} (وإلاّ كان لدينـا فترة واحـدة من البداية ولم يبق مانبرهنه) . إذن يوجد نقطة y في H ليست نقطة نهاية . هذه النقطة طرف مشترك لفترتين في كل منهـما f تسـاوي كثـيرة حدود . إذا كانت n أكـبر من درجتي كثيرات الحدود فإن $f^{(n)}(x) = 0$ لجميع x في كلتى الفـترتـين وكـذلك عند الطرف لأن $f^{(n)}$ متصلة . إذن f تتــطابق مع كثـيرة حدود في إتحــاد الفــترتـين والنقـطة y لاتنتمي إلى المجموعة H .

المحـاكمة السابقة تثبت أن H تامة، والآن نفرض أنها غير خالية . اعتبر H فضـــاء متريـاً كامـــلاً . نطبـق نظرية بير على H ونـحـصـــل على E_n كثيف في جوار من H ، أي أنـــه يوجـــد فترة J تحوي نقـــاطـــاً من H و $f^{(n)}(x) = 0$ لكـل x في $J \cap H$. الفترة J تحوي فترات مكملة للمجموعة H وفي كل من هذه الفـــترات K ، $f^{(m)}(x) = 0$ لقيمـــة معينـــة m (تعتمـد على K) . إذا كانت $m \leqslant n$ فإن $f^{(n)}(x) = 0$ داخـل K بالإشتقـاق . إذا كانت $m > n$ فإن $f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = \ldots = 0$ عنـد أطـراف K لأن الأطـراف في H . بالتكـامـل المـتـكـــرر للدالـــة $f^{(m)}$، نحـصـــل على $f^{(n)}(x) = 0$ على جميع K . نطبـق هذه المـحـــاكـمـــة على كل فترة K مكـمـلة لـ H وفي داخـــل J ؛ إذاً $f^{(n)}(x) = 0$ في J . إذن J لاتحـــوي نقـــاطـــاً من H في الحـــقـــيقـــة . ولـــكـــنـــا توصـلنـــا إلى أن J فترة تحتـــوي على نقـــاط من H بسـبـب فرضـيتـنـــا أن H غير خالية . هذا التناقض يدل على أن H لابد أن تكون خالية، إذن لايوجد إلاّ فترة واحدة $I = [0, 1]$ منذ البداية والدالة f تساوي كثيرة حدود واحدة على هذه الفترة .

(جـ) دوال متصلة ومتذبذبة في كل مكان (Continuous Every Where Oscillating Functions) :

في هذا التـطبيق نأخـذ الفضـاء المتري المكون من الدوال المتصلة على فترة حقيقة . سنبرهن فيما بعد (الجزء ١٧) إن هذا الفضاء كامل . دعونا الآن ننشىء دالة متصلة وغير مطردة (Not monotonic) في أي فترة . بالإمكان إنشاء مثل هذه الدالة مباشـرة

ولكن سنستعمل نظرية بير من أجل توضيح استعمالاتها. الفترات التي أطرافها أعداد قياسية تكون مجموعة قابلة للعد. سمها $I_1, I_2, I_3, \ldots$ وليكن E_n مجموعة عناصر الفضاء C المطردة على I_n. سوف نثبت أن كل مجموعة E_n مخلخلة في C ومن هذا بواسطة نظرية بير نثبت وجود عنصر في الفضاء C لاينتمي إلى أي من المجموعات E_n. بمعني آخر، يوجد دالة متصلة غير مطردة على أي من الفترات I_n وهذا يعني أن الدالة غير مطردة على أي فترة لأن كل فترة في R_1 تحوي فترة أطرافها أعداد قياسية.

الطريقة لإثبات أن E_n مخلخلة مفيدة في تطبيقات عديدة وتتلخص في إثبات أن $C(E_n)$ مفتوحة وكثيفة في كل مكان.

تمرين (١٠-١)

اثبت أن المجموعة المغلقة والتي مكملتها كثيفة في كل مكان، تكون مخلخلة.

في البداية، نثبت أن $C(E_n)$ مفتوحة. إذا كانت f تنتمي إلى $C(E_n)$ فإن f غير مطردة على I_n. هذا يعني وجود ثلاث نقاط y, x و z في I_n حيث $x < y < z$ و $f(x) < f(y)$ و $f(z) < f(y)$ (أو $f(x) > f(y)$ و $f(z) > f(y)$). نذكر أن المسافة بين f و g في الفضاء C تساوي $\max |f(x) - g(x)|$ فإذا كانت g أقرب إلى f من نصف القيمة» الصغرى من بين القيم $f(y) - f(x)$ و $f(y) - f(z)$، فإن $g(x) < g(y)$ و $g(z) < g(y)$ ومن هذا نري أن g غير مطردة على I_n. أي أن جميع العناصر g القريبة بصورة كافية من f ليست في E_n وهذا يعني أن $C(E_n)$ مفتوحة.

القول بأن مكملة E_n كثيفة في كل مكان يعني أنه في كل جوار في C، يوجد دالة f غير مطردة على I_n. إن وجود دالة متذبذبة قريبة من أي دالة متصلة لأمر بديهي. لكي نبرهن على هذا، نستطيع أن نجعل g مركز جوار في الفضاء C، ونحن نستطيع تقريب g في الفضاء C بصورة اختيارية بواسطة كثيرة حدود P (انظر الجزء ١٩). كثيرة الحدود لها مشتقة محدود فإذا أضفنا إلى الدالة P، داله منشارية صغيرة،

أسنانها شديدة الانحدار فإننا نحصل على دالة f قريبة من g حسب مانريد وغير مطردة على I_n .

(د) وجود دالة متصلة غير اشتقاقية في أي مكان :

وجود دالة متصلة ليس لها مشتقة عند أي نقطة كان مفاجأة لرياضيي القرن التاسع عشر. في الحقيقة، «معظم» الدوال المتصلة من هذه النوعية والمفروض أن ندهش عنـدمـا نعثر على دالة متصلة قابلة للاشتقاق حتى عند نقطة واحدة. الأغرب من ذلك، وجود دالة متذبذبة في كل مكان ومع ذلك لها مشتقة نهائية عند كل نقطة. لسؤ الحظ، جميع الأمثلة المعـروفـة حول الظاهرة الأخيرة معقدة ولانستطيع تقديمها هنا.[٨]

سوف نثبت[٩] **أن عنـاصر الفضاء C والتي لها مشتقة نهائية حتى عند نقطة واحدة أو حتى مشتقة من طرف واحد تكون مجموعة من الفئة الأولى في الفضاء C .** **هذه النظرية تدل على أن جميع** الدوال المعروفة في حساب التفاضل والتكامل تمثل مجموعة من الفئة الأولى فقط في C . إننا هنا لانستبعد إمكانية أن «معظم» عناصر C قد يكون لها مشتقات لانهائية من طرف واحد عند معظم النقاط (هندسياً، هذا يعني أن الرسوم لها قرون (Cusps) . سوف نرى في الجزء **٢١** ، أن الدالة المتصلة لايمكن أن يكون مماسها رأسي عند جميع نقاط فترة. مع أنه يوجد دوال غير اشتقاقية في أي مكان بدون مشتقات لانهائية من طرف واحد، إلاَّ أن انشائها معقد[١٠]، الصعوبة قد تكـون مرتبـطة مع كون مجموعة هذه الدوال مجموعة من الفئة الأولى.[١١] «معظم» الدوال المتصلة لها قرون على مجموعة كثيفة في كل مكان (مثل الدالة $y = |x|^{1/2}$ عند المركز). الدالة غير الاشتقاقية في أي مكان لابد أن تكون متذبذبة في كل مكان لأن الدالة المطردة لها مشتقة عند معظم النقاط (انظر الجزء **٢٢**).

الآن نبرهـــن على أن الـــدوال غير الاشـتـقــاقـية في أي مكـــان تكـــون مجمـــوعـــة في C من الـــفئـــة الـــثـــانـية. خذ المـجـــمـــوعـــة E_n المـؤلـفـــة من الـــعـــنـــاصر f في C بحـيث إنـــه عنـــد نقـــطة x من الـفـــترة $[0, 1 - 1/n]$

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant n$$

إذا كانـت $0 < h < 1/n$. واضـح أن أي دالـة f بمـشـتـقـة نهائـية من الـطرف الأيمـن عنـد x تنتمـي إلى واحـدة من المـجـمـوعـات E_n . إذن اتحـاد المـجـمـوعـات E_n يحتـوي جميع عنـاصر الفضـاء C التي لها مشتقـة نهائـية من الـطرف الأيمـن عنـد نقـطة ما. سوف نبرهـن على أن كل E_n مخلخلة، وعليه فإن اتحـادهـا جميعـاً يعـطي مجمـوعة من الفئة الأولى ولذا فهو لايساوي الفضاء C . كما في المثال السابق سنثبت أن E_n مغلقة ومكملتها كثيفة في كل مكان.

نبرهن أن E_n مغلقـة بنفس الـطريقة المستعملة في المثال (جـ) أو من كون المتراجحة التي تعرف E_n تبقى صحيحة عند التقارب في C . أما أن مكملة E_n كثيفة في كل مكان فهذا ينتج بنفس طريقة المثال (جـ) : إذا كانت f دالة متصلة فإننا نوجد دالة قريبة من f ولها مشتقة محدودة ثم نضيف إلى هذه الدالة، دالة متصلة صغيرة بحيث يكون ميل رسمها البياني كبيراً في القيمة المطلقة.

(هـ) تحليل فترة مغلقة

تمريـن (١٠-٢)

برهن أن الفـترة المغلقـة لايمكن أن تسـاوي اتحـاد عدد لانهائي قابـل للعـد من المجموعات المغلقة المنفصلة وغير الخالية

١١ ـ المجموعات التي مقياسها صفر
(Sets of Measure Zero)

يمكن أن نعتـبر أي مجمـوعـة من الفئة الأولى بأنها مجموعة مؤلفة من عدد قليل من النقـاط وذلـك لأنها لايمكن أن تملا فضـاء متر ياً كاملاً. ومع ذلك، يمكن أن نعتـبر هذه المجمـوعات كبيرة إذا نظرنا إليها من وجهة نظر أخرى. مجموعات الفئة الأولى قد تكـون كثيفة في كل مكان مثل النقاط القياسية في R_1 وقد تكون غير

قابلة للعـد مثل مجموعة كانتور، وقد تكون كثيفة في كل مكان وغير قابلة للعد كما رأينا سابقاً.

هناك نوع آخر من المجموعات «الضئيلة» والتي لها استعمالات كثيرة. لنفرض أن مجموعة E في R_1 ويمكن تغطيتها بمجموعة قابلة للعد من الفترات المفتوحة والتي يمكن جعـل مجمـوع أطـوالهـا صغـيراً حسب مانريد. في هذه الحالة، نقول إن E مجموعة مقياسها صفر. هناك تعريف مشابه في R_n. المجموعات التي مقياسها صفر هي المجمـوعـات التي يمكن إهمالها في نظرية تكامل ليبيج (Lebesque integration) والاسم مقياس (measure) يأتي من هذه النـظرية. إذا حدث شيء على مجموعة ماعدا التي مقياسها صفر، فإننا نقول إنه حدث في كل مكان تقريباً أو لكل النقاط تقريباً.

اتحاد مجموعتين، أو عدد نهائي أو حتى مجموعة قابلة للعد من المجموعات التي مقياسها صفر يعطينا مجموعة مقياسها صفر.

واضح أن أي مجموعة قابلة للعد في R_1، مقياسها صفر ولذا يوجد مجموعة مقياسهـا صفر وكثيفة في كل مكان. على العكس من ذلك، المجموعة التي مقياسها صفر قد لاتكون قابله للعد أو حتى من الفئة الأولى، بينما المجموعة من الفئة الأولى قد لايكون مقياسها صفر. الآن نعطي بعض الأمثلة على ماذكرناه. أولاً، مجموعة كانتور غير قابله للعد ولكن مقياسها صفر. إذا كان ϵ عدداً موجباً صغيراً، فإننا نأخـــذ عدداً كافياً من الفـترات المكملة من E بحيث يزيد مجمـوع أطـوالهـا عن $1 - \epsilon/2$. المجمـــوعـــة البـــاقية والتي تحوي E يمكن تغـــطيتهـــا بعـدد متنـاه من الفترات لايزيد مجموع أطوالها عن ϵ ولذا فإن مقياس E يساوي صفر كما ذكرنا.

الآن ننشيء مجموعة من الفئة الأولى ومقياسها ليس صفراً عن طريق تعديل لمجموعة كانتور. اجعل $\{a_n\}$ متتالية الأعداد الموجبة بحيث $\Sigma a_n = \epsilon < 1$. احذف من فترة الوحدة، فترة مفتوحة طولها a_1، ثم احذف من كل من الفترتين الباقيتين، فترة مفتوحة طولها $\frac{1}{2} a_2$ وهلم جرا. مثل مجموعة كانتور، سوف نحصل على مجموعة مخلخلة E ولذا فهي من الفئة الأولى. كذلك مقياس E ليس صفراً لأنه لو أمكن تغـطية E بمجمـوعـة قابلة للعـد من الفترات التي مجموع أطوالها أقل من $1 - \varepsilon$،

لاستطعنا تغطية فترة الوحدة بمجموعة من الفترات مجموع أطوالها أقل من ١ وهذا مستحيل.

لكي ننشيء مجموعة من الفئة الثانية ومقياسها صفر، علينا أن ننشىء مجموعة كانتـور المعممـة E من النـوع الـذى أشـرنـا إليه قبل قليل. في الفترات المكملة للمجموعة E ، ننشىء مجموعات مماثلة وهكذا بإمكاننا أن نجعل مقياس مكملة اتحاد جميع مجموعات كانتور المعممة يساوي صفر، وبما أن كل مجموعة كانتور مخلخلة، إذن هذه المكملة من الفئة الثانية.

بما أن مقياس كل فترة في R_1 لايساوي صفراً، فيمكننا أن نثبت أن مجموعة من النقاط غير خالية بإثبات أن مقياس مكملتها صفر. فمثلاً، مقياس أي مجموعة قابلة للعد في R_1 يساوي صفراً، وعليه فإن R_1 غير قابل للعد. المجموعة التي مقياسها صفر مثل المجموعة من الفئة الأولى «صغيرة» بمعنى أن مكملتها لايمكن أن تكون خالية، ولانستطيع أن نقول أي شيء عن مدى صغر المجموعة بدون اللجوء إلى نظرية مقياس ليبيج (Lebesque measure) .

تمريـن (١١-١)

افـرض أن المجمـوعة E في R_1 تحقق الخاصية الآتية: يوجد عدد موجب q أقل من 1 بحيث إنه لكل فترة (a, b) نستطيع تغطية المجموعة $E \cap (a, b)$ بمجموعة قابلة للعد من الفترات والتي مجموع أطوالها لايتعدى $q(b - a)$. برهن أن مقياس E يساوي صفـراً. (هذا يعني أن المجموعة التي تغطي جزءاً معيناً على الأكثر من كل فترة، لاتغطي أي شىء تقريباً من أي فترة).

الفصل الثاني

الـدوال

١٢ - الدوال

فى مبادىء الرياضيات نقول إن y دالة فى المتغير x إذا أمكن تحديد y لكل قيمة من قيم x . هذا تعريف عملي جيد ويكفي لكثير من التطبيقات. بالرغم من ذلك، يجب أن نشير أن هذا ليس تعريفاً دقيقاً لمفهوم الدالة. (بنفس الطريقة نحن نتعامل مع الجملة $y \to \infty$ مع أن الرمز ∞ لايعنى شيئاً فى حد ذاته). من الأفضل فى الحقيقة إعطاء تعريف رياضي دقيق لمفهوم الدالة. خذ مجموعتين غير خاليتين F, E من الأعداد الحقيقية وكون طائفة من الأزواج المرتبة (x, y) حيث $y \in F, x \in E$ وحيث إن كل x تظهر مرة واحدة فقط وكل y تظهر مرة واحدة على الأقل. هذه الطائفة من الأزواج المرتبة تسمى **دالة نطاقها E ومداها F** أو باختصار دالة من E إلى F . فمثلاً إذا كانت E مجموعة الأعداد الحقيقة R_1 و F الفترة المغلقة $[-1, 1]$ والأزواج المرتبة هى $(x, \sin x)$ لكل x فى R_1 . هذا مانسميه فى العادة بالدالة $\sin x$. **لاحظ أننا لو جعلنا** E الفترة $[0, 2\pi]$ بدلاً من المجموعة R_1 فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(x, \sin x)$ حيث $x \in E$ تمثل دالة مختلفة، وهى **تحديد الدالة الأصلية** على الفترة $[0, 2\pi]$.

وهذا مثال آخر. إذا كانت E تمثل الأعداد الموجبه $1, 2, 3, \ldots$ و F تمثل لمجموعة $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ فإن الدالة التى أزواجها المرتبة $(1, 1), (2, 4), (3, 9), \ldots$ مثال على دالة خاصة تسمى فى العادة متتالية أعداد حقيقية.

تمرين (١٢-١)

أى معادلة فى متغيرين x و y تحدد مجموعة من الأزواج المرتبة (x, y) التى تحقق المعادلة. على هذا الأساس فهي قد تعين أو لاتعين دالة.

قرر أى من المعادلات الآتية تعين دوال:

أ) $x^2 + y^2 = 25$ ب) $x^2 + y^2 = 0$

جـ) $y = |x|$ د) $|x| + |y| = -2$

هـ) $y = \cos x$ و) $x = \cos y$

إذا كانت المجموعة F مكونة من عنصر وحيد مثل العدد 3 فإن الدالة التى أزواجها المرتبة (x, 3) تكون **دالة ثابتة** ويجب التفريق بينها وبين الرقم 3.

بالإمكان تعميم تعريف الدالة على النحو التالي. لتكن E مجموعة غير خالية من النقاط فى فضاء معين S (هذا الفضاء قد يكون R_n أو C أو أى فضاء آخر وقد لايكون فضاءًا متريًا) ولتكن F مجموعة غير خالية من نقاط فى فضاء آخر T قد يختلف تماماً عن الفضاء S. إن طائفة جميع الأزواج المرتبة (x, y) حيث x فى S و y فى T تسمى الضرب الكارتيزي لـ T, S. أى دالة من E إلى F تكون مجموعة جزئية من هذا الضرب الكارتيزي وتتكون من جميع الأزواج (x, y) حيث يظهر كل عنصر فى E مرة واحدة فقط ويظهر كل عنصر فى F مرة واحدة على الأقل. هذه دالة من E إلى T. ونقول إن نقاط المجموعة F قيم للدالة وأن F صورة E. أحياناً نسمى مثل هذه الدالة راسمًا من E إلى F.

الضرب الكارتيزى لمجموعة الأعداد الحقيقية R_1 يعطى الفضاء R_2 (إذا أخذنا المسافة المناسبة فى الفضاء الجديد). الدالة نطاقها ومداها فى R_1 تمثل مجموعة من النقاط فى R_2 تسمى **منحنى الدالة**. مثل هذه الدالة تسمى دالة حقيقة فى متغير حقيقى. فى هذا الكتاب لن نعِّرف ولن نستخدم مفهوم المتغير.

المزية الرئيسية من هذا التعريف المجرد للدالة والذى يعتمدعلى مجموعة من الأزواج المرتبة هو أنه يعطينا أشياء رياضية معرفة بدلالة مفاهيم سابقة معروفة لدينا.

ولذا نستطيع إرجاع أى برهان حول الدوال إلى هذه المفاهيم الأولية . من عيوب هذا التعريف أننا نفقد المحتوى البديهي لمفهوم الدالة . لذا يستحسن النظر إلى الدالة على أنها تحويل أو راسم أو قاعدة تنقل عناصر النطاق إلى النطاق المصاحب وخصوصاً عند تقديم المفهوم لأول مرة وكذلك فى تطبيقات مفهوم الدالة فى مجال الفيزياء وغيرها من الأغراض العملية .

يمكن أخـذ مجمـوعة الأزواج المرتبة على أنها نموذج للدالة وليست الدالة ذاتها . إذا أخذنا مفهوم الدالة على أنه مفهوم أولي فبالإمكان عندئذ تعريف الزوج المرتب بدلالة الداله[١١أ] .

المتتالية دالة نطاقها مكون من الأعداد الموجبة . عند معالجة المتواليات نعتبر النـطاق معـروف وثـابت ولذا فإننانحدد المتوالية بسرد نقاط المدى حسب الترتيب المستمد من نقاط النطاق . وعندئذ نسمى نقاط المدى عناصر المتتالية بدلاً من تسميتها قيم الـدالـة . هذا يعيدنـا إلى التعريف غير الدقيق للمتوالية والذي استعملناه في السـابق . إذاً المتتـالية $\{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ أو المتتـالية $\{2^n\}$ تعنى مجمـوعة الأزواج المرتبة $(1,2), (2,4), (3,8) \ldots$. والمتتـالية $\{1\}$ تعنى مجمـوعـة الأزواج $(1,1), (2,1), (3,1), \ldots$. المتتـالية الجـزئية لمتتالية معطاة هى تخصيص (تحديد) المتتالية على مجموعة جزئية من الأعـداد الـطبيعية ويمكن تحديدهـا عن طريق إعـادة ترقيم عناصر المتتالية . فمثلا $\{2^n\}$ متتالية جزئية لمتتالية $\{n\}$. (المتتالية المنتهية لاتعتبر متتالية حسب تعريفنا هنا) .

اذا أردنا أن نكون دقيقين فعلينا أن نفرق بين رمز الدالة f وبين قيمة الدالة عند النقطة x أى $f(x)$. الرمز f يمثل مجموعة الأزواج المرتبة بينما $f(x)$ ترمز للنقطة فى المدى والتى ترتبط مع النقطة x فى النطاق . فمثلا ، الدالة اللوغارتمية مكونة من الأزواج $(x, \log x)$ ؛ أحـد هذه الأزواج $(e, 1)$ و $\log(e) = 1$. في العـادة لانفـرق بين الـدالـة وقيمتها . وقد يبدو الحديث عن الدالة $\log x$ غريباً ولكن علينا أن نحدد نطاق الدالة والـذى يتكـون من الفترة $(0, \infty)$ في هذه الحالة . أحياناً نريد الحديث عن دوال أكثر تعقيداً مثـل الدالة التى تأخذ القيمة $\log(\sin x)$ عند x ، وفي هذه الحالات لامفر من استخدام العبارة غير الدقيقة «الدالة $\log(\sin x)$» ، إننا نواجه نفس المشكلة عندما نريد الحديث عن بعض الدوال البسيطة والتى لايوجد لها أسماء متفق عليها . الدالة التى

أزواجها المرتبة (x, x) حيث x فى النطاق تدعى الدالة x » ولكن بصورة أدق نقول إنها الدالة I حيث $I(x) = x$.

إذا كان نطاق الدالة f في R_1 فإن قيمها تكتب في الصورة $f(x)$. أما إذا كان النطاق في R_2 فإننا نكتب القيم في الصورة $f(x, y)$ ، مع أن $f((x, y))$ أدق في الحقيقة. يرمز في العاده لعناصر متتالية بالرمز s_n بدلاً من $s(n)$. مع أنه من المفروض أن نرمز للمتتالية بالرمز s . فمثلاً المتتالية المكونة من الأزواج المرتبة $(1, 1), (2, 4), (3, 9), \ldots$ تكتب في العـادة $\{n^2\}$ وكـذلـك أى تحديد للمتتـاليـة يرمـز له كالتـالى $\{n^2\}_{n=3}^{\infty}$ ، $\{n^2\}_{n=3}^{8}$ ، $\{n^2\}$ حيث n فردية وهلم جراً. بنفس الطريقة، نستطيع كتابة دالـة f مثـل $f(x) = \sin 2x$ حيث النـطاق R_1 في الصـورة $\{\sin 2x\}$ بحيث يرمـز $\sin 2x$ للنقـاط التى في مدى الـدالـة والتى ترتبط مع النقـاط x من النـطاق. تحديد هذه الـدالـة على الفـترة $(0, 2\pi)$ يصبـح $\{\sin 2x\}$ حيث $0 < x < 2\pi$. هنـاك رمـوز كثـيرة شائعة الاستعمال(١٢)، وليس من الحكمة الالتزام بأى منها في هذا الكتاب.

في الأصل، كانت الدالة هي مايعرف بواسطة قاعدة أو قانون ولم يسبب هذا أى مشـاكـل لمدة طويلة. بالإمكان التعبير عن الكثير من الدوال بواسطة قوانين قد تكون معقدة إلى حد ما. (لاحظ أن الدالة البسيطة $f(x) = \sin x$ تخفي وراءها عملية تتـعـلق بمـفـهــوم الـنهـايات). فمـثـلاً إذا كانـت $f(x) = 1$ حيث x عدداً نسـبياً و $f(x) = 0$ ، حيث x غير نسبي فإن

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} (\cos m!\pi x)^n.$$

تمرين (١٢-٢)

تحقق من العلاقة السابقة.

هذا مثال آخر أكثر تعقيداً(١٣).

$$f(x) = \lim_{r \to \infty} \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sum_{V=0}^{m} [1 - (\cos\{(v!)^r \pi/\chi\})^{2n}]$$

هذه الدالة تعطينا عند العدد الصحيح الموجب x أكبر عامل أولي للعدد x .

إن الدوال التى يمكن الحصول عليها من الدوال المتصلة بعملية نهاية واحدة

تعتبر دوال خاصة (راجع الجزء ١٨). في الحقيقية يوجد دوال نطاقها ومداها في R_1 لايمكن الحصول عليها من الدوال المتصلة وبعدد لانهائي قابل للعد من عمليات النهاية(١٤). سوف لانعطى مثالاً على هذه الظاهرة هنا.

مع أن الدوال بصفة عامة تتمتع ببعض الخواص الشيقة والجديرة بالاهتمام (راجع بند **٢١**) نجد أن معظم الخواص الهامة مقصورة على دوال تنتمى إلى مجموعات معينة. لحسن الحظ، نجد أن معظم الدوال التى تظهر بصورة طبيعية في تطبيقات الرياضيات تكون في الغالب متصلة أو قابلة للاشتقاق. لذا نجد أن دراسة خواص مثل هذه الدوال أمر هام ومرغوب فيه.

١٣ - الدوال المتصلة

سوف نعرف ماذا نعنى بالدوال المتصلة ومن ثم نناقش بعض خواص هذه الدوال. لم يظهر مفهوم الاتصال في الرياضيات بهذه الصورة وإنما جاء المفهوم أولاً ثم بحث الناس عن تعريف مناسب لمفهوم الاتصالي البديهي. إذا كانت الدالة معرفة على فترة من R_1 فقد كان الاعتقاد في وقت ما أن مثل هذه الدالة تكون متصلة إذا أخذت كل قيمة واقعة بين أى قيمتين من قيمها أى أن صورة كل فترة في النطاق تكون فترة أو نقطة. **هذه خاصية القيمة المتوسطة** (Intermediate value property). لسوء الحظ، هذه الخاصية وحدها لاتجعل الدالة تتمتع بجميع الخواص التى نتوقعها في الدالة المتصلة. فمثلاً الدالة $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ لجميع قيم x ماعدا 0 و $f(0) = 0$ تحقق خاصية القيمة المتوسطة ولكننا لانجدها متصلة عند النقطة 0. بالإمكان إنشاء دالة تحقق خاصية القيمة المتوسطة في كل فترة مهما كانت صغيرة بدون أن تكون متصلة وذلك لأنها تأخذ جميع القيم بين 0 و 1 على كل فترة.

ننشىء هذه الدالة على النحو التالي.(١٥) خذ x بين 0 و 1 وانشرها في النظام العشري $x = 0.a_1a_2\ldots$ وخذ العدد $z = 0.a_1a_3a_5\ldots$. إذا لم تكن z كسراً دورياً، اجعل $f(x) = 0$. أما إذا كانت z دورية حيث تبدأ دورتها الأولى بالخانة a_{2n-1} فسوف نجعل

$$f(x) = 0.a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\cdots.$$

هذا يعّـرف الـدالة المطلوبة f . إذا كانت I أى فترة معطاة فباستطاعتنا إيجاد n كبيرة بصـورة كافية بحيث تحوى الفـتره I كسراً منتهياً $0.a_1a_2 \ldots a_{2n-1} \ldots$ وكـذلـك جميع الأعـداد $0.a_1a_2a_3 \ldots a_{2n-1}a_{2n}$ والتى تبـدأ بنفس الخانات الأولى وعددها $2n - 1$. ليكن $y = 0.b_1b_2 \ldots$ أى عدد فى $(0, 1)$. نستطيع أن نجعل $0.a_1a_3 \ldots a_{2n-1}a_{2n+1}a_{2n+3} \ldots$ دورياً بحيث تبدأ دورته الأولى عند a_{2n-1} وعلى هذا الأساس نجد أن

$$x = 0.a_1a_2 \ldots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3} \ldots .$$

وصورته $f(x) = y$.

الأمـر الغـريب هنـا هو أن كل دالـة معـرفـة على فترة فى R_1 ومـداها في R_1 يمكن تمثيلهـا كمجموع دالتين كل منهما تأخذ كل القيم الحقيقية في كل فترة جزئية من نطاق الداله(١٥ أ) .

ربما أن القارىء على علم بتعريف الاتصال للدوال الحقيقية المعرفة على R_1 . نقـول إن الـدالـة f متـصلة عنـد x_0 إذا تمكنـا من إيجـاد عدد موجب δ بحيث $|x - x_0| < \delta$ يقـتضى أن $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ حيث ϵ عدد موجب اختيارى ؛ ونقـول إن f متصلة على فترة ما إذا كانت متصلة عند كل نقطة من الفترة . الفكرة البديهية وراء هذا التعريف هى أن كل تغيير صغير في مكان نقطة من النطاق يؤدى إلى تغيير صغير في مكان صورتها في المدى . ولكن علينا أن نعرف بأن هذا التعريف لايتطابق تمامـاً كما نريد مع مفهومنا البديهى للدالة المتصلة . فمثلاً قد لانتمكن من رسم منحنى دالـة متصلة بواسطة القلم إذا كانت الدالة متذبذة في كل مكان (راجع الجزء ١٠) . في الحقيقة، المفهوم البديهى للدالة المتصلة أقرب إلى الدالة المتصلة والتى يتألف منحناها من عدد نهائي من الأجزاء المتزايدة أو المتناقصة .

بالإمكان تعميم تعريف الاتصال إلى الحالات التى يكون فيها النطاق والمدى في أى فضاء ات مترية . في أبسط الحالات، يحتوى نطاق f على جوار حول النقطة x_0 وفي هذه الحـالـة نقـول إن f متصلة عنـد x_0 بحيث إذا أعطينا أى عدد موجب ϵ ، تمكننـا من إيجاد عدد موجب δ بحيث إذا كانت $d(x, x_0) < \delta$ فإن $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ (لاحظ أن الرمز d قد يعنى مسافات مختلفة) .

إذا أردنـا دراسـة الاتصال في حالات أعم فسوف نجد أن الدالة قد تكون متصلة أو غير متصلة تبعاً للفضاء الذى يقع فيه نطاقها. فمثلاً، خذ دالة ثابتة معرفة على R_1. هذه طبعـاً دالة متصلة عند كل نقطة من نطاقها. ولكن إذا اعتبرنا R_1 مجموعة جزئية من R_2 فإننا لانستطيع القول بأن الدالة متصلة عند أى نقطة لأنها غير معرفة في أى جوار من R_2. في الحقيقة هذه الدالة تحديد أو تخصيص على R_1 لدوال كثيرة معرفة على R_2 وبعض هذه الدوال متصلة والبعض الاخر غير متصل.

باستـطاعتنـا دائمًا أن نعتبر نطاق الدالة فضاءاً متر ياً في حد ذاته، ومن ثم نتساءل ما إذا كانت الدالة متصلة بالنسبة إلى نطاقها. هناك فكرة جديدة لها علاقة بتخصيص دالة على مجموعة جزئية من نطاقها. قد يحدث أن يكون التخصيص دالة (بالنسبة للنطاق الجديد) وإن لم تكن الدالة الأصلية متصلة. فمثلاً الدالة f التى تأخذ القيمة 1 على الأعداد النسبية من R_1 والقيمة 0 على الأعداد غير النسبية غير متصلة عنـد جميع النقاط. ولكن تخصيص الدالة نفسها على المجموعة أ المكونة من الأعداد النسبية في R_1 يصبـح دالـة متصلة على الفضـاء P. نقـول في هذه الحالة إن الدالة الأصلية غير متصلة عنـد جميع نقـاط P، ولكنها متصلة على P بالنسبة للفضاء P. نستـطيع تفـادي الالتباس الذى ينتج عن مثل هذه الأمور إذا أخذنا في الاعتبار أن تعـريف الدالة يتطلب تحديد نطاقها بالإضافة إلى تحديد كيفية حساب قيم الدالة. إن تحديد النطاق أمر ضروري وخصوصاً إذا كانت الدالة معطاة بواسطة قانون.

إذا قلنـا إن الـدالة f متصلة عند النقطة x_0 المنتمية للمجموعة E بالنسبة لـ E فإنـنـا نعـني أن تخصـيص f على E دالـة متـصلة عنـد x_0 بالنسبـة للفضـاء E. بالإمكـان الحصـول على تعريف مكافىء وذلك عن طريق تعريف (ϵ, δ) المعطى في الصفحـة السابقة بشرط أن ينتمي العنصر x إلى المجموعة E. فمثلا لتكن f معرفة على فترة حقـيقـية تحوي x_0 داخـلهـا ولـتـكن g تخصيص f على الفـترة $[x_0, b)$ التي إلى يمـين النقـطة x_0. إذا كانت g متصلة عنـد x_0 فإننـا نقـول إن f متصلة عنـد x_0 من اليمـين. هذا يعني أن f تحقق شـرط الاتصـال عنـد x_0 حيث نأخـذ جواران من اليمـين فقط. كمثـال، نأخـذ الـدوال f_3, f_2, f_1 والتي تأخذ القيمة 1− على $x < 0$ والـقـيمـة 1+ على $x > 0$ بينـما $f_1(0) = 1$، $f_3(0) = 0, f_2(0) = -1$. إذن f_1 متـصـلة

من اليمـين عنـد f_2, 0 متصلة من اليسـار و f_3 غير متصلة من أى جهـه وكـذلـك جميع الدوال الثلاث غير متصلة عند 0 .

تمرين (١٣-١)

برهن أن الدالة $f(x) = d(x, y)$ حيث y نقطة من فضاء متري ، هي دالة متصلة على الفضاء .

تمرين (١٣-٢)

لتكن E مجموعـة مغلقة في فضاء متري ، وعرف الدالة $D(x)$ عند أى نقطة x من الفضاء بأنها بعد x عن E . برهن أن D متصلة .

إذا أردنا تعميم الاتصال إلى فضاء ات غير مترية فعلينا البحث عن تعريف ، لايعتمد على مفهوم المسافة . مع أننا سوف نقتصر على دراسة الفضاء ات المترية في هذا الكتـاب ، إلاَّ أننا سوف نعطي تعريف الاتصال في الفضاء ات العامة وهـذا التعريف العام مفيد حتى في حالة الفضاء ات المترية . هذا التعريف الجديد يقول إن **f متصلة على نطاقها إذا و إذا فقط كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في المدى هي مجموعة مفتوحة في النطاق** . والنطاق f هنا فضاء ومعرف به مجموعات مفتوحة . الصورة العكسية لمجموعة E تعنى مجموعة نقاط النطاق والتى تقع صورها في E . فمثلا ، إذا كانت $f(x) = \sin x$ على النطاق R_1 فإن الصورة العكسية للفترة $(0, 1)$ تتكون من اتحاد الفترات $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(-2\pi, -\pi)$, ... والتى تعطى مجموعة مفتـوحـة . أما إذا كا نت $f(x) = 1$ على $x > 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = -1$ على $x < 0$ فإن الصورة العكسية للفترة المفتوحة $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ تتألف النقطة 0 وحدها ولذا فهى غير مفتوحة .

تمرين (١٣-٣)

أعط مثالاً يدل على أن صورة مجموعة مفتوحة تحت دالة متصلة قد لاتكون مفتوحة .

لكى نتحقق من تكـافؤ تعـريفي الاتصال في حالة الفضاء المتري نفرض أن

f متصلة حسب التعـريف الأول. لتكن E مجموعة مفتوحة في فضاء المدى ولتكن x_0 نقطة في الصورة العكسية لـ E . إذن $f(x_0) \in E$ وإذا كانت ε صغيرة بصورة كافية فإن كل y بحيث $d(f(x_0), y) < \varepsilon$ لابد وأن تنتمى للمجموعة E (لأن E مفتوحة). وحيث إن f متــصــلة فلابــد من وجــود δ موجبــة بحيث أن $d(x, x_0) < \delta$ يقـتـضـى $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. إذن فجميع النقاط x القريبة بشكل كاف من x_0 تكون صورها في E ، وهذا يعنى أن الصورة العكسية لـ E تحوى جوارا كل نقطة من نقاطها ولذا فهى مفتوحـة. والآن نبرهن الجـزء الآخر، ونفرض أن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة هى مفتوحة. هذا يقضى أن الصورة العكسية لأي جوار في المدى ومعرف بالمـتر اجحــة $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ سيكــون مفتـوحـاً ولـذا فهـو يحوى جوارا مثـل $d(x,x_0) < \delta$ وهذا جوار مناسب يحقق الشرط المطلوب في التعريف الأول.

لقـد برهنا على أكثر مما قصدنا في بداية الأمر، حيث **أثبتنا أن f متصلة عند x_0 إذا وإذا فقط كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة حول $f(x_0)$ تحتوى جواراً للنقطة x_0.**

تمرين (١٣-٤)

إذا كانـت f دالــة حقيقية ومتصلة عنــد x_0 و $f(x_0) \neq 0$ فبرهن على وجــود جوار حول x_0 بحيث $|f(x)| \geq m > 0$ على هذا الجوار.

تمرين (١٣-٥)

إذا كانت f دالة حقيقية معرفة في R_1 ومتصلة عند x_0 فبرهن على أن f محدودة على جوار ما حول x_0 .

تمرين (١٣-٦)

الـدالـة الحقيقية f معـرفـة على R_1 وغـير متصلة عند x_0، أثبت وجود متتاليه $\{x_n\}$ نهايتها x_0 وعدد موجب ε بحيث $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$.

١٤ - خواص الدوال المتصلة

من المعـروف أن مجموع أو حاصل ضرب أو خارج قسمة دوال متصلة يكون دالة متصلة (بشرط أن لانقسم على صفر). يجب أن نفترض أن الدالتين g, f لهما نفس النطاق وأن قيم هذه الدوال في R_1. في هذه الحالة نستطيع أن نعرف $f/g, fg, f + g$ بالطريقة المعتادة. إذا كانت g, f دالتين متصلتين عند x_0 فإن $f/g, fg, f + g$ جميعها دوال متصلة إذا كانت معرفة. إذا كان نطاقا الدالتين g, f مجموعتين مختلفتين فإن $f + g$ تعني مجمـوع تخصيص هاتـين الـدالتـين إلى تقاطع نطاقي g, f وبنفس الطريقة، f/g يعني خارج قسمـة تخصيص g, f إلى تقاطع نطاقي g, f بحيث لا تأخذ g القيمة صفر. لاحظ هنـا أن الـدالتين $f_1(x) = x/x$ و $f_2(x) = 1$ مختلفتان لأن نطاقاتهما مختلفة ولايمكننا القول بان f_1 متصلة عند 0. **التمرين (١٣-٥)** مفيد عند دراسة اتصال حاصل ضرب دالتين.

تمرين (١٤-١)

إذا كانت f متصلة عند x_0, g غير متصلة عند هذه النقطة فبرهن أن $f + g$ غير متصلة هناك. هل بالإمكان أن تكون $f + g$ متصلة عند x_0 إذا كانت g, f غير متصلتين عند x_0؟.

تمرين (١٤-٢)

أكمل تفاصيل براهين اتصال الدوال $f + g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ حيث g, f دالتين متصلتين.

نقول إن الدالة f أحادية (Univalent أو One-to-one) إذا لم تظهر أى قيمة y من المدى أكثر من مرة في مجموعة الأزواج المرتبة التى تكون الدالة. في هذه الحالة الأزواج المرتبة (y, x) حيث y في المدى و x في النطاق تمثل دالة نسميها معكوس f(Inverse) ونرمز لهابالرمز f^{-1} ونطاقها يساوى مدى f ومداها يساوى نطاق f. يحدث أحياناً أن يكون معكـوس الـدالة المتصلة الأحادية دالة متصلة. هذا صحيح إذا كان نطاق الدالة مجمـوعـة متراصـة في R_n أو بصـورة أعم عندما يحقق النطاق خاصية بولزانو - فيرشتراس والتى تقول إن كل مجموعة جزئية لانهائية من النطاق لها نقطة نهاية.

والآن نبرهن ماسبق. علينا أن نثبت أن صور المجموعات المفتوحة تكون مفتوحة لأن هذه الأخيرة هى الصورة العكسية للمجموعات المفتوحة تحت الدالة f^{-1}. هذا يكافىء قولنا بأن صور المجموعات المغلقة تكون مغلقة وهذا أسهل بالنسبه لنا هنا.

تمرين (١٤-٣)

اثبت التكافؤ في الجملة السابقة.

لتكن E مجموعة مغلقة في نطاق f ولتكن F صورة E وخذ y_0 نقطة نهاية للمجموعة F، علينا أن نبرهن أن $y_0 \in F$. اجعل $\{y_n\}$ متتالية من نقاط F المختلفة بحيث $y_n \to y_0$ و اجعل $y_n = f(x_n)$. بما أن الدالة أحادية فتوجد x_n وحيدة لكل y_n وكذلك x_n نقاط مختلفة لأن y_n مختلفة. إذن المجموعة المكونة من x_n لها نقطة نهاية x_0 ولذا توجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ تؤول إلى x_0. إذن $x_0 \in E$ لأن E مغلقة. بما أن f متصلة، إذن $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ ولكن $y_{n_k} \to y_0$ ومنه نجد أن $y_0 = f(x_0) \in F$.

مع أن خاصية القيمة المتوسطة (الجزء ١٣) ليست خاصية مميزة للدوال المتصلة إلاَّ أنها من خواص الدوال المتصلة (إذا تحققت بعض الشروط). أى دالة حقيقية متصلة تحقق خاصية القيمة المتوسطة إذا كان نطاقها مجموعة مترابطة في فضاء متري S. لبرهان ذلك نجعل $f(b) = B, f(a) = A$ ونجعل $A < C < B$. خذ المجموعتين E_2, E_1 في S والمكونة على الترتيب من نقاط S بحيث $f(x) < C$ ونقاط S بحيث $f(x) > C$. هاتان المجموعتان منفصلتان لأن $f(x)$ لايمكن تكون أقل من C وأكبر من C في نفس الوقت. هاتان المجموعتين غير خاليتين لأن $a \in E_1$ و $b \in E_2$. وهما كذلك مفتوحتان لأنهما الصورتان العكسيتان لمجموعتين مفتوحتين. بما أن نطاق f مترابط فهو لايساوى اتحاد مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين ومنفصلتين. إذن نطاق f لابد وأن يحتوى على نقطة واحدة c على الأقل لاتنتمى إلى E_1 أو E_2. القيمة الممكنة لـ $f(c)$ هى C.

لقد رأينا في الجزء ٧ أن الدالة الحقيقية المتصلة والمعرفة على مجموعة متراصة تأخذ قيمتها الكبرى والصغرى.

تمرين (١٤-٤)

يمكن الحصول على برهان أفضل للجملة السابقة إذا فرضنا أن أصغر حد علوي M لقيم f ليس قيمة لها ومن ثم فحصنا الكمية $\frac{1}{M - f(x)}$.

تمرين (١٤-٥)

استنتج أنه إذا كان النطاق متراصاً ومتر ابطاً فإن مدى أى دالة حقيقية ومتصلة يكون فترة محدودة ومغلقة أو نقطة .

التراص ليس ضرورياً لوجود قيمة عظمى .

تمرين (١٤-٥ أ)

خذا الدالة الحقيقية f المتصلة وغير السالبة على النطاق $[a, \infty)$ واجعل $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$. برهن أن f تأخذ قيمتها العظمى على $[a, \infty)$.

تمرين (١٤-٥ ب)

خذ الدالة f كما في التمرين السابق ولكنها موجبة دائمًا برهن على وجود متتالية $\{x_n\}$ حيث $x_n \to \infty$ و $f(x) < f(x_n)$ لجميع $x > x_n$. أى أنه عندما $x \to \infty$ فإن الدالة f لاتأخذ قيمة كبيرة مثل التى تأخذها عند x_n .

الآن نعطى بعض تطبيقات خاصية القيمة المتوسطة. خذ الدالة الحقيقية f المعرفة على فترة في R_1 والتى تحقق خاصية القيمة المتوسطة على أى فترة من نطاقها وأفرض أنها غير متصلة عند النقطة c . باستعمال التمرين (١٣-٦)، نستنتج وجود $\{x_n\}$ نهايتهـا c بحيث إما $f(x_n) > f(c) + \varepsilon$ حيث ε عدد موجب أو $f(x_n) < f(c) - \varepsilon$ ، ولنفـرض الاحتـمال الأول. بما أن f تحقق خاصية القيمه المتوسطة على كل فترة فإنها تأخـذ كل قيمـة بين $f(c)$ و $f(c) + \frac{1}{2}\varepsilon$. أضف إلى ذلك أنها تفعل ذلك عدد لانهائياً من المرات لأننا نستطيع دائمًا أن نختار جوارا أصغر حول c . إذن **إذا كانت الدالة المعرفة على فترة من R_1 تحقق خاصية القيمة الوسطى على كل فترة جزئية وهى كذلك**

غير متصلة فهى لابد وأن تأخذ بعض القيم عددا لانهائيا من المرات. (إذن الدالة غير المتصلة والتى تحقق خاصية القيمة المتوسطة والمنشأه في بند **١٣** توضح هذه الحقيقة على أحسن وجه). كما نحصل على النتيجة الآتية: **إذا كانت دالة تحقق خاصية القيمة المتوسطة على كل فترة ولاتأخذ أى قيمة أكثر من مرة واحدة فإنها متصلة**. إذن فالدالة متصلة إذا أخذت كل قيمة بين $f(a)$ و $f(b)$ مرة واحدة فقط على كل فترة $[a, b]$ في نطاقها[١٥ب].

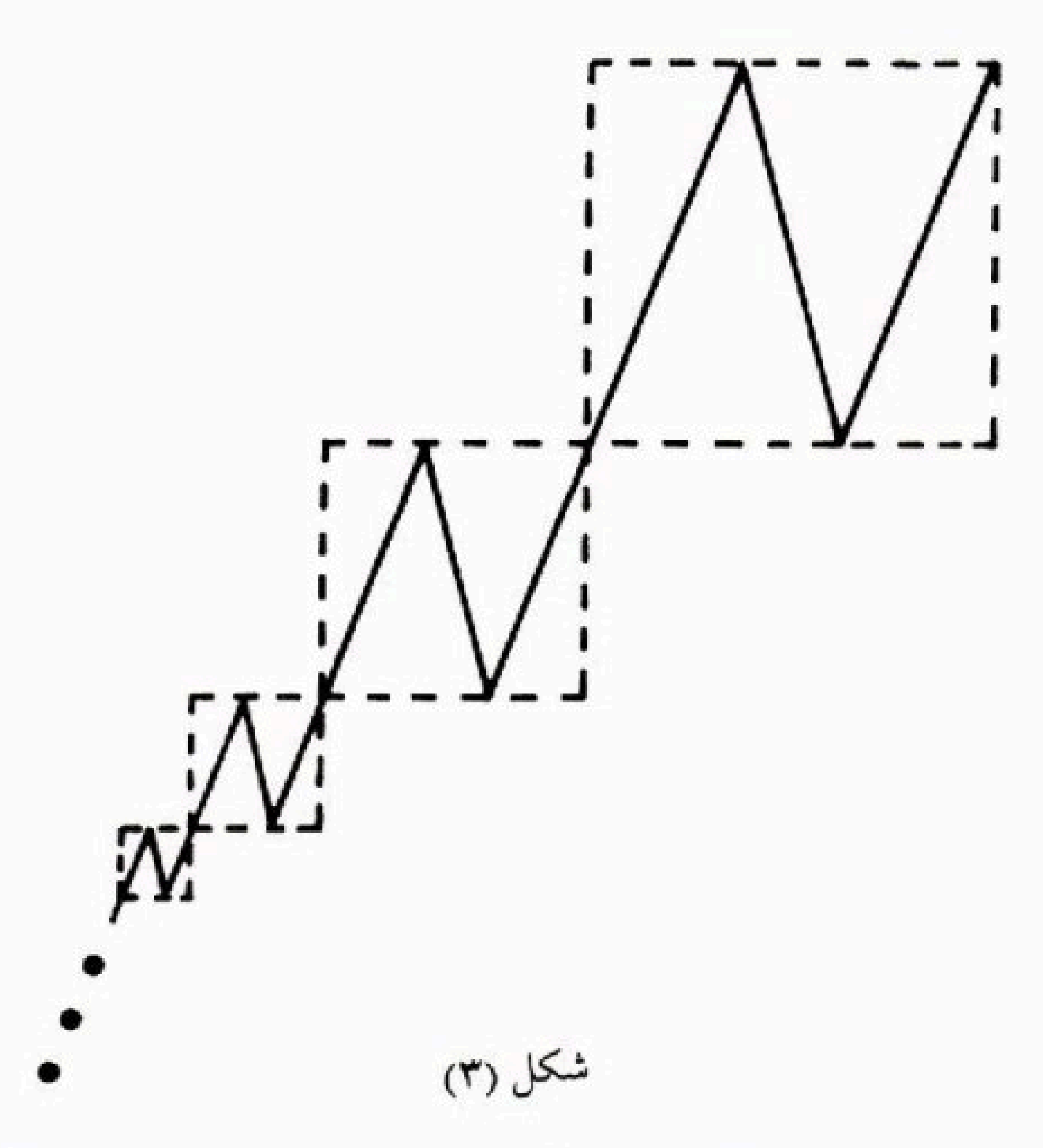
الدالة المطردة الفعلية تعطى مثالا على دالة لاتأخذ أى قيمة أكثر من مرة ولكن ليست جميع الدوال التى تحقق هذه الخاصية مطردة فعلية. (خذ $f(x) = x + 1$ على $-1 < x \leqslant 0$ و $f(x) = x - 1$ على $0 < x < 1$). ولكن الدالة المتصلة التى لاتأخذ أى قيمة أكثر من مرة واحدة لابد وأن تكون مطردة فعلية. لأنها لو لم تكن مطردة فعلية لوجدنا نقاطا $x_1 < x_2 < x_3$ حيث $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ، $f(x_3) \leqslant f(x_2)$ (أو عكس هذه المتراجحات) ولذا فإن f تأخذ قيمتها العظمى عند نقطة بين x_1 و x_3 (لأن f متصلة) وتصبح القيمة العظمى فعلية (لأن f لاتأخذ أى قيمة أكثر من مرة). إذاً $f(x) < f(c)$ لقيم x على جانبي النقط c ومن خاصية القيمة المتوسطة نجد أن f تأخذ قيمة بالقرب من $f(c)$ مرتين وهذا يناقض الفرضية. (نفس النقاش يثبت أن الدالة المتصلة لابد أن تكون مطردة بين قيمها العظمى والصغرى المتتالية أى أنه إذاً كانت f تأخذ قيمتها العظمى عند x_1 وقيمتها الصغرى عند x_2 (حيث $x_2 > x_1$) ولاتأخذ قيمة عظمى أو صغرى في الفترة $(x_1$ و $x_2)$ فان f مطردة في $(x_1 ، x_2)$.).

لقد برهنا الآن أن الدوال المتصلة على فترة في R_1 والتي تأخذ كل قيمة مرة واحدة على أنها الدوال المطردة الفعلية. ماهى الدوال المتصلة التى تأخذ كل قيمة مرتين فقط؟ الجواب هو أنه لايوجد مثل هذه الدوال[١٥حـ]. لنفرض أن f دالة من هذا النوع. بما أنها غير مطردة فهى تأخذ قيمتها العظمى أو الصغرى داخل نطاقها، ولنفرض أنها تأخذ القيمة العظمى. إذن يوجد x_0 بحيث $a < x_0 < b$ و $f(x_0) = M$ و $f(x) < M$ على $x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta$. القيمة M توخذ مرتين، مرة عند x_0 ومرة عند

نقطة أخرى y_0 . أى رسم يوضح أن الدالة f لابد أن تأخذ قيمة ما M' بحيث $M > M'$ بالقرب من y_0 ومرتين على الجوانب المختلفة للنقطة x_0 وهذا تناقض . البرهان الكامل يعتمد على خاصية القيمة المتوسطة وهو متروك للقارىء .

بما أن الدالة المتصلة f لايمكن أن تأخذ كل قيمة مرتين فقط ، لنفرض الآن أن f تأخذ كل قيمة مرتين على الأكثر . في هذه الحالة نستطيع القول بأن منحنى f يتكون من ثلاثة أجزاء مطردة على الأكثر(١٥د) (مثل المنحنى في شكل رقم **٣** بعد حذف قطعه من أحد طرفيه) .

يجدر بنا هنا ملاحظة عدم وجود حقيقة مماثلة للدوال المتصلة التى تأخذ كل قيمة ثلاث مرات على الأكثر ومنحنى هذه الدالة قد لايتألف من عدد نهائي من القطع المطردة(١٥هـ) ، كما في شكل (٣) حيث إن ضلع المربع النوني من اليمين يساوى a_n و $\Sigma a_n < \infty$.



شكل (٣)

لنفـرض أن f متصلة على $[a, b]$ وتـأخذ كل قيمه مرتين على الأكثر. مما سبق نرى أن f مطردة بين أى قيم عظمى وصغرى متتالية . فإذا كانت القيم العظمى والصغرى للدالة f عند الأطراف فقط فإن f مطردة . إذا لم تكن مطردة فلابد أن يكون لها قيمة عظمى أو صغرى داخل نطاقها ولتكن قيمة عظمى عند c . إذا لم يوجد قيم عظمى

أو صغـرى داخلية فإن الـدالة مطردة على (a, c) و (c, b) . الحالة التالية هى التى يكون للدالـة f قيمـة عظمى داخلية واحـدة عند c_1 . وقيمة صغرى داخلية عند c_2 مثل $a < c_1 < c_2 < b$. إذن f مطردة على كل من الفترات الثلاث $(a, c_1), (c_1, c_2), (c_2, b)$. أخـيراً لنفـرض أن عدد القيم العظمى والصغرى الداخلية للدالة f أكثر من أثنين. لنفــرض أن f تأخــذ قيمـة عظمى وقيمـة صغـرى وقيمـة عظمى (ليست متتـالية بالضرورة) عنـد النقـاط c_1, c_2, c_3 حيث $c_1 < c_2 < c_3$ و $f(c_1) > f(c_2)$ و $f(c_3) > f(c_2)$ ولنفـرض كذلـك أن $f(c_1) \geqslant f(c_3)$. إذن f تأخذ قيمة أقل بقليل من $f(c_3)$ مرتين على الأقل ؛ إذا كانت هذه القيمة أكبر من $f(c_2)$ فإنها ستكون أقل من $f(c_1)$ ومن خاصية القيمة المتوسطة نستنتج أنها ستوخذ مرة أخرى بين c_1 و c_2 ثلاث مرات وهذا يناقض الفرضية.

سنعطى الآن تطبيقاً آخر لخاصية القيمة المتوسطة. لتكن f دالة متصلة من فترة في R_1 إلى R_1 . نقول إن للدالة وترا أفقياً طوله a إذا وجدت نقطة x بحيث أن x و $x + a$ في نطاق f و $f(x) = f(x + a)$. هذا يعنى وجود قطعة مستقيمة أفقية طولها a طرفها على منحنى الدالة ولايهمنا ما إذا كانت القطعة تشترك مع المنحنى في نقاط أخرى. فمثلاً إذا كانت $f(x) = 1$ لكل x فإن لها أوتار أفقية من جميع الأطوال، القطعة من $(-1, 1)$ إلى $(1, 1)$ تمثـل وتر أفقى طولة 2 للدالة $f(x) = x^3 - x + 1$ ، بينما الدالة $f(x) = x^3$ ليس لها أوتاراً أفقية على الإطلاق.

نقول إن الدالة f المعرف على R_1 **دورية (Periodic)** ودورتها P إذا كانت $f(x + p) = f(x)$ لكل x .

تمرين (١٤-٦)

اثبت أن الدالة المتصلة الدورية تكون محدودة.

تمرين (١٤-٧)

برهن أن للدالة الدورية المتصلة قيمه عظمى.

تمرين (١٤-٨)

برهن أنه إذا كانت f متصلة ودورتها p فإن قيمة التكامل $\int_x^{x+p} f(t)dt$ مستقلة عن x .

نلاحظ أولا أن **للدالـة الدورية المستمرة أوتاراً أفقية من جميع الأطوال، أي أنه إذا كانـت دورة f تســاوى p وكـــان a أي عدد حقيقى فإنــه توجــد x بحيث $f(x + a) - f(x) = o$. لإثبات ذلك لنأخذ الكمية**

$$\int_0^p [f(x + a) - f(x)]dx$$

والتى تساوى صفر (راجع تمرين «١٤-٨») . إذاً المكامل (Integrand) لابد وأن يغير إشـارته (إلاَّ إذا كان مساوياً تماماً للصفر وفي هذه الحالة يكون $f(x + a) = f(x)$ وهو المطلوب) . لكن دورة المكامل تساوى P وإذا كان يغير الإشارة مرة في الدورة فلابد وأن يغـيرهـا على الأقـل مرتين ليحصل عند p على القيمة ذاتها وعند الصفر إلاَّ إذا كان صفـراً عنـد الصفـر في البداية . لذلك يوجد على الأقل نقطتان x في $[0, p)$ محققان $f(x + a) = f(x)$ ولـذا نستنتـج أن **للدالـة المستمـرة التى دورتها p وترين أفقيين بأي طول معطى بحيث أن أطر افهما اليسرى تقعان في** $[0, p)$ (١٥).

تمرين (١٤-٩)

اثبت أنه لأى دالة مستمرة ودورية وتر (ليس بالضرورة أفقياً) بأى طول معطى ومنتصفه يقع على منحنى الدالة، أي أنه لكل a توجد x بحيث.

$$f(x + a) - f(x) = f(x) - f(x - a).$$

الوضع يختلف تماماً بالنسبة للدوال غير الدوريه، فإذا كانت f دالة مستمره على $[0, 1]$ فربما لايوجد لها اى وتر أفقي على الإطلاق. على كل حال لنفترض أن لها وتراً أفقياً واحداً، على وجه **الخصوص لنفترض أن $f(0) = f(1)$ ، لذا فالقطعة المستقيمة $(0, 1)$ تكون هى الوتر الأفقى**. نظرية الوتر الشاملة(١٦) تنص على أنه **توجد أوتار أفقيـة أطـوالهـا** $1/2, 1/3, 1/4, ...$ **ولكن ليس للدالـة بالضرورة وتر أفقى بأى طول لايساوى مقلوب عدد طبيعى**.

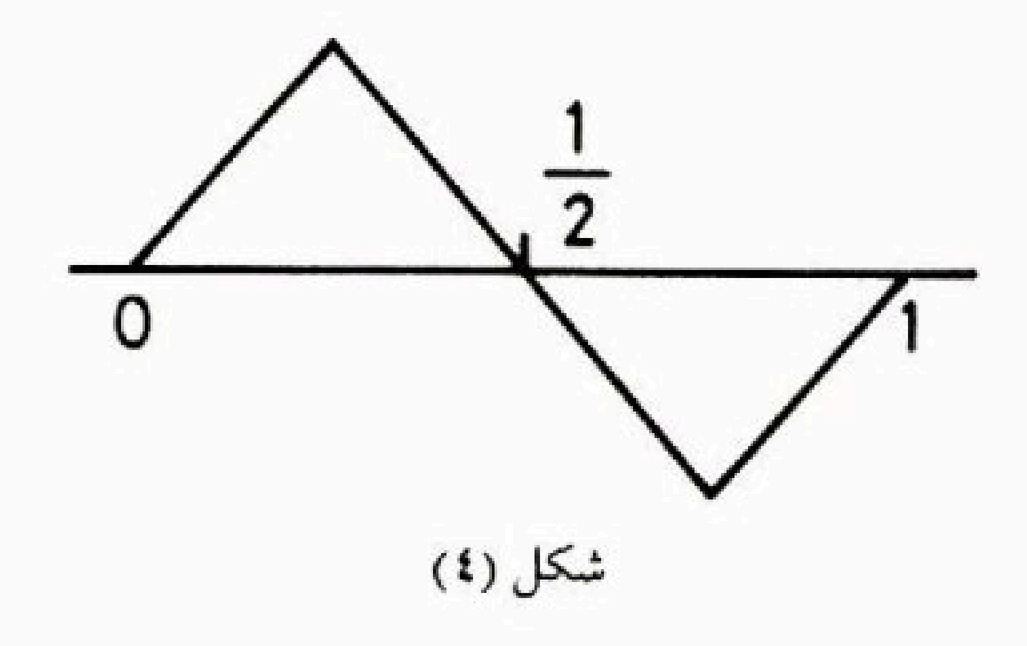
لإثبات هذه النظرية لنفترض أن k عدد صحيح موجب ونعتبر الدالة المستمرة g والمعرفة كالتالى: $g(x) = f(x + 1/k) - f(x)$ على $[o, 1 - K^{-1}]$ النظرية السابقة تؤكد لنا أن الصفر يوجد ضمن مدى g . لو لم تكن هذه هى الحالة فإن g سوف تكون إما موجبة لجميع قيم x التي تنتمى إلى نطاقها أو سالبة لجميع قيم x التى تنتمى إلى نطاقها (ذلك يعزى إلى خاصية القيمة المتوسطة). لذلك فإن $g(o) + g(1/k) + g(2/K) + \ldots + g(1 - 1/K)$ إما موجب أو سالب، على كل حال هذا المجموع بعد الاختصار يساوى $f(1) - f(o) = o$.

الطريقة الأخرى لإثبات هذه النظرية إنه لو افترضنا أن $g(x) > o$ لجميع قيم x ، أى أنه لو افترضنا أن $f(x) < f(x + 1/k)$ لجميع قيم x لحصلنا على .

$$f(0) < f(1/k) < f(2/k) < \ldots < f\left(\frac{k-1}{k}\right) < f\left(\frac{k}{k}\right) = f(1) = f(0).$$

وهذا غير ممكن .

المنحنى التالي يبين دالة f لها وتر أفقي طوله 1 لكن ليس لها أي وتر أفقي بطول a حيث $1/2 < a < 1$. أيضاً أي دالة من هذا النوع لها أوتار أفقية ذات أطوال ليست مقلوب أعداد طبيعية، لكن الجزء الأخير من نظرية الوتر الشاملة يؤكد لنا بأنه لكل عدد b ليس مقلوب عدد طبيعي يوجد دالة مستمرة بوتر أفقى طولة 1 ولكن ليس لها وتر أفقي بذلك الطول b كما في شكل (٤) .



شكل (٤)

تمرين (١٤-١٠)

بين كيفية إعطاء أمثال توضح الجزء الأخير من نظرية الوتر الشاملة لكل $b \neq 1/k$ (التناظر في المثال السابق للقيم $1/2 < b < 1$ يعطى فكرة خاطئة).

الجزء المدهش والمكمل لنظرية الوتر الشاملة[١٧] **ينص على أن الدالة المستمرة التى لها وتر أفقي بطول 1 لها دائمًا إما وتر أفقى بطول a أو اثنين مختلفين بطول** $1 - a$ (إذا كانت $0 < a < 1$). لرؤ ية ذلـك لنفـترض أن $f(0) = f(1)$ وتكون الدالة جديدة g عن طريق تكرار f بدورة مقدارها 1 . كدالة دورية مستمرة لابد وأن يكون لـ g وتـران أفقيان كل واحـد بطول a وأطر افهما من اليسار في $[0, 1]$ راجع بند **١٤** . الوتر الافقى للدالة بطول a والمبتدء من x هوايضا وتر أفقى للدالة f إلا إذا كان $x + a < 1$ وفي هذه الحـالـة يكـون $0 < x + a - 1 < 1$ ولذلك فإن الوتر الأفقي بطول $1 - a$ للدالة g (كذلك للدالة f) يبدأ من $x + a - 1$ وينتهى عند x .

تمرين (١٤-١١)

اثبت نظرية الوتر الشاملة بالاستقراء الرياضى مبتداء بالحقيقة التالية: إذا كان $f(0) = f(1)$ **فإن للدالة f وتراً أفقياً إما بطول a أو بطول** $1 - a$.

بنفس الـطريقـة يمكننا إثبات أنة إذا كانت f' هى مشتقة f في $[0,1]$ و $f'(0) = f'(1)$ فإنـه لكل عدد صحيح n توجد نقطتان $x, x + 1/n$ بحيث يكون للدالة f نفس الميل عند كلتي النقـطتين. هذا يعتمد على الحقيقة راجع بند **٢١** التى تنص على أن المشتقة تحقق خاصية القيمـة المتوسطة، وهذه الخاصية (للدالة g وليس فقط للدالة f) هى كل ما استخدم لإثبات نظرية الوتر الشاملة.

تطبيق آخـر لنفس الفكرة السابقة يزودنا باثبات سهل لنظرية النقطة الثابتة والتى تقول إن **للدالة المستمرة التى نطاقها ومداها نفس الفترة نقطة ثابتة على الأقل** أى أنـه يوجد نقطة واحدة على الأقل تتساوى مع صورتها. بالإمكان صياغة هذه النظرية كالتالى.

إذا كانت f مستمرة ومعرفة على $[0, 1]$ بحيث $0 \leq f(x) \leq 1$ ، فإن منحنى الدالة لابد وان يقطع المستقيم $y = x$.

تمرين (١٤-١٢)

اثبت الجملة السابقة: اثبت أنه إذا كانت f مستمرة ومعرفة على [a, b] وتأخذ جميع قيمها في [a, b] فإنه توجد x في [a, b] بحيث $f(x) = x$.

هناك نظرية أخرى لها علاقة قريبة بما سبق تنص على أنه إذا كانت f مستمرة ودورية (دورتها 2p) وإذا كانت $f(x) = -f(x + p)$ لجميع قيم x (مثل منحنى الدالة $g = \sin(x)$ حيث $p = \pi$) فإن $f(x) = 0$ عند قيمة واحدة لـ x على الأقل. هذا واضح جداً من نظرية القيمة المتوسطة. ولكن إذا صيغت الجملة السابقة بطريقة مختلفة فإنها تصبح حالة سهلة من نظرية بورزك (Borsuke) للنقطة المعاكسة والتى من الصعب إثباتها في حالة الأبعاد العالية (Higher dimensions):[١٨].

لنفرض أن f مستمرة نطاقها محيط دائرة في R_2 ومجالها في R_1 ولنفرض أن صورة أى زوج من النقاط المتعاكسة (أى النقطتان التى على طرفي قطر) هى زوج من النقاط المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل فإنه توجد نقطة على المحيط صورتها نقطة الأصل.

يوجد تطبيق آخر لنظرية القيمة المتوسطة يبين أنه بالإمكان تنصيف فطيرة محلاة في بعدين ذات شكل اختيارى عن طريق قطعها بسكين في أى اتجاه معين، على الأقل إذا كانت حدود الفطيرة بسيطة للغاية. فمن السهل أن نرى أن للجزء من الفطيرة في أحد الجانبين من خط يقطعها في ذلك الاتجاه مساحة تتغير بصورة مستمرة كلما تحرك الخط موازياً لنفسه. بما أن هذه المساحة ربما تكون إما صفراً أو مساوية للمساحة الكلية للفطيرة فلابد وأن يأتى وقت تكون فيه مساوية تماماً للنصف.

الآن نبين كيفية تنصيف فطيرتين في المستوى في آن واحد بنفس المستقيم.

لنفترض أن الفطيرتين هما A و B . اوجد خط ينصف B في أى اتجاه معين ماراً بنقطة ما p على دائرة في R_2 مركزها 0 وليكن $f(p)$ يمثل الفرق (مأخوذة الإشارة بعين الاعتبار) بين مساحة الجزء من A الواقع يسارهذا الخط ومساحة الجزء الواقع يمينه. نطاق هذه الدالة محيط دائرة ومداها في R_1 وصورة النقاط المتعاكسة هى نقاط متماثلة حول 0 لأن تبديل p بالنقطة المعاكسة ينتج عنه استبدال اليمين باليسار. لو استطعنا إثبات أن F مستمرة فإن الحالة الخاصة من نظرية بورزك أعلاه تبين أن $f(p) = 0$ لنقطة ما p وبالتالي فإن الخط في الاتجاه OP ينصف كلاً من A و B في آن

واحد. كون f مستمرة ليس واضحاً جداً لكنه على كل حال ممكن.

نلاحظ أنه يكفى أن نثبت أن أى تغيير طفيف في وضع p ينتج عنه ليس فقط تغيير طفيف في اتجاه الخط المنصف لـ B ولكن أيضاً تغيير طفيف في موضعه على سبيل المثال عند تقاطعه مع أحد الإحداثيات. لأنه لو كان ذلك صحيحاً فإن f(p) سوف يتغير بمقدار طفيف. الكلام السابق عن الخطوط المنصفة لـ B صحيح بدون تحفظ إذا وضعنا فقط شرط على الشكل المسموح به للفطيرة، على سبيل المثال الفطيرة التى على شكل o—o بالإمكان تنصيفها بعدة خطوط عمودية إذا حصرنا اهتمامنا بالفطيرة المحدبه (Convex) فهذه المشكلة تزول كما يتضح من الرسم.

تمرين (١٤-١٣)

اثبت أنه إذا أعطينا منحنى محدب مغلق في المستوى فإنه بالإمكان إيجاد خط ينصف المنحنى والمساحة التي بداخلها في نفس الوقت[١٩].

توجد نظريات مشابهة في أبعاد أعلى لكنها صعبه الإثبات. بالإمكان صياغة نظرية النقطة الثابتة في ثلاثة أبعاد كالتالى: إذا حرك كوب من القهوة بصورة مستمرة فإنـه يوجـد على الأقـل جزيء واحد يعود إلى موضعه الأصلى. (هذا صحيح إذا افترضنا فقط أن القهوة تحتل كل نقطة بداخل الكوب وأن الجزيء عبارة عن نقطة).

كذلك نظرية النقطة المعاكسة في أبعاد تنص على أن الدالة المستمره التي نطاقها سطح كرة ومداها في R_2 بحيث أن صورة كل زوج من النقاط المتعاكسة هي نقاط متماثلة حول نقطة الأصل لابد أن. ترسل نقطة ما على السطح إلى نقطة الأصل. بالإمكان استخدام هذه النظرية لإثبات أنه باستطاعتنا تنصيف ثلاثة حجوم آنياً بواسطة مستوى (هذه نظرية الشطيرة)[٢٠].

١٥ - النهايات العظمى والصغرى (Upper and lower limits)

سوف نحتاج إلى تعميم فكرة نهاية متتالية من الأعداد الحقيقية. إذا كانت $\{S_n\}$ تمثل متتالية بحيث إن الأعداد S_n تكون مجموعة محدودة فسنبين أنه يوجد دائماً عدد حقيقى

L يحقق الخـاصية التالية : إذا أعطينا ϵ موجب فإن $S_n \leqslant L + \epsilon$ عندما تكون n كبيرة بدرجـة كافية بالإضـافـة أنـه يوجد عدد لانهائي من الـ S_n يحقق $S_n \geqslant L - \epsilon$. هذا العدد يسمى النهاية العظمى لـ $\{s_n\}$ ويكتب على الصورة $\lim \sup s_n$ أو $\overline{\lim}\, s_n$. إذا كانت S_n غير محدودة من أعلى فإننا نكتب $\lim \sup s_n = +\infty$ وإذا كانت s_n غير محدودة من أسفل فربما يتعذر وجود L وفي هذه الحالة نكتب $\lim \sup s_n = -\infty$.

لنأخذ بعض الأمثلة :

(١) لنفـرض أن $S_n = (-1)^n$ لذلـك فإن المتتالية هي $1 - 1, 1, - 1, \ldots$ وبالتالى $\lim \sup s_n = 1$.

(٢) لنفترض أن $s_n = n$ أي أن المتتالية هي $1, 2, 3, \ldots$ وبالتالى $\overline{\lim}\, s_n = +\infty$.

(٣) لنفترض أن $S_n = \{-1, -2, \ldots\}$ فإن $\overline{\lim}\, S_n = -\infty$.

(٤) لنـفـترض أن $S_n = 1/n$ حيث $n = 1, 2, \ldots$ في هذه الحـالـة $\overline{\lim}\, s_n = \lim S_n = 0$.

(٥) لنفترض أن $S_n = \{1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, \ldots\}$ فإن $\lim S_n = 1$.

تمرين (١٥-١)

على افتراض أن الأعداد L_n معرفة كالتالى $L_n = \sup s_k$ لكل $K \geqslant n$. اثبت أن $\lim \sup s_n$ موجود إذا كانت $\{S_n\}$ محدودة.

تمرين (١٥-٢)

عرف النهاية الصغرى ($\underline{\text{Lim}}$) أو (Lim inf.) بطريقة . مشابهة وعينها للأمثلة الخمسة السابقة والمعطاة للنهاية العظمى .

إن تعريف النهاية العظمى يتشابة مع نظيره تعريف أصغر حد أعلى فيما عدا إن المجمـوعات الجزئية المنتهية من العناصر S_n بالإمكان التغاضي عنها . على سبيل المثال قيمـة $\overline{\lim}\, s_n$ لاتتغير إذا استبدلنا أول ألف عنصر S_n بغيرها من الأعداد . كذلك باستطاعتنا تعريف $\overline{\lim}\, S_n$ على أنه أكبر نهاية تحصل عليها عن طريق اختيار متتاليات جزئية متقاربة من $\{S_n\}$. هذه التسمية تعزي لهذا التعريف بالذات.

نلاحظ أنـه $\overline{\lim}\,(S_n + t_n) \leqslant \overline{\lim}\, S_n + \overline{\lim}\, t_n$ عنـدمـا تكـون كلتا الكميتين في الـطرف الأيمن محدودتين، لكن ربما نحصل على متراجحة صارمه كما في الثال التالى : إذا كانت $S_n = \{1, 0, 1, 0, ...\}$ و $t_n = \{0, 1, 0, 1, ...\}$. على كل حال فإنه في حالة وجود $\overline{\lim}\, t_n$ فإن .

$$\overline{\lim}\,(S_n + t_n) = \overline{\lim}\, S_n + \overline{\lim}\, t_n.$$

تمرين (١٥-٣)

اثبت صحة المتراجحة والمساواة المذكورتين أعلاه .

بالإمكان تعميم المتراجحة السابقة إلى مجاميع منتهية ولكن ليس إلى مجاميع غير منتـهية على سبيل المثـــال إذا كان S_k يمثـــل المتتـــالية $\{0, 0, ..., 0, 1, 0, ...\}$ التى عنـاصرهـا $S_{k,n}$ تساوى الصفر فيها عدا العنصر $S_{k,k}$ فهو 1 ، في هذه الحالة (عندما $n \to \infty$) فإن $\overline{\lim}\,(S_{1,n} + S_{2,n} + ...) = \overline{\lim}\, 1 = 1$ بينما $\overline{\lim}\, S_{k,n} = 0$ لكل k .

بالإمكـان أيضـا تعريف النهايات العظمى والصغرى للدوال التي مداها في R_1 ونـطاقها فضاء أعم من ذلك . إذا كان نطاق f مجموعة S في فضاء متري وكانت x_0 نقـــطة نهاية لـ S فإن $\overline{\lim}_{x \to x_0} f(x) = L$ يعنى أنـــه إذا أعـــطينـــا ϵ موجب فإن $f(x) \leqslant L + \epsilon$ لكل X في جوار صغير بقدر كاف مركزه x_0، بالإضافة إلى أنه توجد متتـالية من النقـاط $\{x_n\}$ نهايتها x_0 بحيث $f(x_n) \geqslant L - \epsilon$. تجدر الإشارة إلى أننا نحتاج إلى بعض التغيرات الطفيفة إذا كان $L = \pm \infty$. بطريقة مشابهة يمكن تعريف $\overline{\lim}_{x \to +\infty} f(x)$ إذا كان نطاق مجموعة جزئية من R_1 غير محدودة من أعلى . هذه بعض الأمثلة : .

(١) إذا كان $f(x) = \sin x$ لكـــل $x \in R_1$ فإن $\overline{\lim}_{x \to +\infty} f(x) = +1$ و $\underline{\lim}_{x \to +\infty} f(x) = -1$

(٢) إذا كان $f(x) = e^x \sin x$ لكـــل $x > 0$ فإن $\overline{\lim}_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\underline{\lim}_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(٣) إذا كان $f(x) = e^{1/x}$ لكـــل $x \neq 0$ فإن $\overline{\lim}_{x \to 0} f(x) = +\infty$ و $\underline{\lim}_{x \to 0} f(x) = 0$

تمرين (١٥-٤)
اثبت أنه إذا كان $\overline{\lim}\, s_n = \underline{\lim}\, s_n = L$ وكانت L عددا نهائياً فإن $\lim s_n = L$ حسب التعريف المعطى في البند (٨).

على الرغم من تطرقنا إلى موضوع نهايات المتتاليات إلاَّ أننا لم نتطرق بعد إلى نهايات الدوال بشكل عام. من السهل أن نعرف $\lim_{x \to x_0} f(x)$ للدوال التى مجالها في R_1 على أنـه القيمـة المشتركه لـ $\overline{\lim}_{x \to x_0} f(x)$ و $\underline{\text{Lim}}_{x \to x_0} f(x)$. وإذا كان نطاق f يحتـوى على جوار من اليمين للنقطة x_0 تعرف $\overline{\lim}_{x \to x_0} + f(x)$ على أنه النهاية العظمى لتخصيص (Restriction) f لجوار من اليمين حول النقطة x_0، وبطريقة مشابهة نعرف $\underline{\lim}$. القيمـة المشتركة (إذا وجدت) لهذه النهايات العظمى والصغرى من اليمين تكتب بالشكل $\lim_{x \to x_0} + f(x)$ أو $f(x_0 +)$. كذلك يوجد تعريف مشابه لـ $f(x_0 -)$.

١٦ - متتاليات من الدوال (Sequences of Functions)

قبـل أن نبـدأ بمناقشة بعض الخواص المعينة لفئات من الدوال من المستحسن أن نناقش أولاً عدة أنواع من التقارب لمتتاليات من الدوال.

لنفـرض أن S_n تمثل متتالية عناصرها دوال ذات نطاق مشترك وتأخذ نطاق مشـترك وتأخذ قيمها $S_n(x)$ في R_1 . الآن أمامنا اختياران إما أن نركز اهتمامنا على المتتالية $\{S_n\}$ التى عناصرها الدوال ذاتها أو على المتتالية $\{s_n(x)\}$ التى عناصرها قيم هذه الدوال عند النقاط X في النطاق المشترك. نقول إن $s_n(x)$ **تتقارب نقطياً** على مجموعة S إذا كانت المتتاليات $\{S_x(x)\}$ من الأعداد الحقيقية تتقارب لكل x في S . فمثـلاً لنفرض أن $s_n(x) = x^n$ حيث $0 \leqslant x \leqslant 1$ ، فإن لكل x في $[0, 1]$ في المتتالية $\{s_n(x)\}$ متقـاربـة، النهـاية هي الـدالة غير المتصلة L حيث $L(x) = 0$ إذا كانت $0 \leqslant x < +1$ و $L(1) = 1$. من جهـة أخـرى إذا اعتـبرنـا نفس الـدوال s_n كنـقـاط في الـفـضـاء C فإن المـتـتـالـية $\{s_n\}$ غير متـقـاربـة في الـواقـع $d(s_n, s_{2n}) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1}(x^n - x^{2n})$. وإذا أخذنا $x = 2^{-1/n}$ فإن $d(s_n, s_{2n}) \geqslant x^n - x^{2n} = 1/4$.

لذلك $\{S_n\}$ لايمكن أن تكون متتالية كوشي (Cauchy) .

تمرين (١٦-١)

اختبر تقارب $\{S_n\}$ في C إذا كان (أ) $s_n(x) = x^n(1 - x)$.

(ب) $S_n(x) = nx^n(1 - x)$ ، حيث في كلتا الحالتين $0 \leqslant x \leqslant 1$.

لقد رأينا كيف أن متتالية من الدوال المستمرة تتقارب نقطياً على الرغم أنها نفسها إذا اعتبرناها كعناصر فى الفضاء C لاتتقارب. من الواضح أن تقارب متتالية عناصرها في C يقتضي التقارب النقطي لتلك المتتالية من الدوال، على كل حال يوجد فضاءات مترية عناصرها دوال لايؤدى تقارب متتالية من عناصرها إلى التقارب النقطي. المثال على ذلك هو المعطى في بند (٤) والذى عناصره دوال مستمرة في $[0, 1]$ والمسافة بين أى عنصرين هي $d(x, y) = \left\{ \int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$. لنأخذ متتالية عناصرها في هذا الفضاء ومعرفة كالتالي: إذا كانت $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$ فإن. $x_k(t) = 0$. وفي الفترة $(2^{-n}k - 1, 2^{-n}(k + 1) - 1)$ منحنى الدالة عبارة عن مثلث طول قاعدته 2^{-n} وارتفاعه 1 ; هذا المثلث يتحرك للأمام والخلف كلما ازدادت قيمة k وهذا يحول دون التقارب النقطي على الرغم من كون $0 \rightarrow 2^{-n/2} > d(x_k, 0)$.

بالإمكان تعريف النهاية النقطية العظمى والصغرى $\overline{\lim}\ s_n(x)$, $\underline{\lim}\ s_n(x)$ لمتتالية من الدوال s_n ذات النطاق المشترك ومداها في R_1 سواء كانت هذه المتتالية متقاربة نقطياً أم خلاف ذلك. إذا كانت تلك النهايتين محدودتين فإنهما يعرفان لنا دالتين نسميهما $\lim \sup s_n(x)$ و $\lim \inf s_n(x)$.

في معظم الأحيان من الأفضل أن نعمم فضاء الدوال المستمرة C عن طريق اعتبار الدوال المستمرة التي نطاقها مجموعات أعم من مجرد فترات في R_1. عند تعريف C لقد استخدمنا فكرة وجود قيمة عظمى للدالة التي نطاقها فترة متراصة وبما أن ذلك أيضاً صحيح إذا استبدلنا النطاق ليكون مجموعة متراصة فإنه بالإمكان استخدام نفس التعريف: لنفرض أن E مجموعة متراصة في فضاء متري، إذن الفضاء C_E يتكون من الدوال المستمرة التي نطاقها E ومداها في R_1 بحيث $d(f, g) = \mathrm{Max}_E\,|f(x) - g(x)|$ ، وبطريقة مشابهة بالإمكان تعريف فضاء الدوال المحدوده B_E التي نطاقها E وذلك باعتبار $d(f, g) = \sup_E |f(x) - g(x)|$ في هذه الحالة E ليست بالضرورة متراصة.

إذا أخذنا متتالية من الدوال المستمرة المتقاربة (على أساس أن عناصرها تنتمى إلى C_E فإننا نقول إنها **متقاربة بانتظام** في E . بشكل أعم لنفترض أن لدينا متتالية من الـدوال (سـواء كانت محدودة أو غير محدودة، مستمـرة أو غير مستمـرة)، إذا كان الفرق بين (أي دالتين محدود فباستطاعتنا تكوين المسافة بينهما في B_E، وإذا كانت هذه المتتالية (من الدوال) كوشي حسب هذه المسافة، فإننا نقول إنها متقاربة بانتظام في E . مثلاً إذا كانت $f(x) = 1/x$ فإن المتتالية $\{f, f, ...\}$ متقاربة بانتظام في الفترة $1 \leqslant x < 0$ ، أيضا المتتالية $\{S_n\}$ حيث $S_n(x) = x^n$ متقاربة بانتظام في أى فترة معينة $[0, a]$ حيث $0 < a < 1$. ولكن ليس في $[0, 1]$ ، كذلـك نلاحظ أنها غير متقاربة بانتظام في الفترة النصف مغلقه $[0, 1)$. لذلك من المهم أن ندرك أن التقارب المنتظم في كل فترة جزئية معلقة من فترة مفتوحة يختلف عن التقارب المنتظم في الفترة المفتوحة .

الطريقة الأخرى السائدة للتعبير عن التقارب المنتظم لمتتالية $\{S_n\}$ في E هو أن نقول لكل ϵ موجب يوجد عدد طبيعن N بحيث إذا كانت n و m أكبر من N فإن $|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon$ لجميع قيم x في E . يجب ملاحـظة أن N لاتعتمـد على النقطة x التي نأخذها في E . فإذا سمحنا لـ N أن تعتمد على x في هذه الحالة نحصل على تعريف التقارب النقطي مرة أخرى .

الآن لنفترض أنه بإمكاننا إيجاد أعداد M_n بحيث $|S_n(x) - S_{n+1}(x)| \leqslant M_n$ لجمـيع قيم x في E ، أي أن: $\sup_{x \in E}|S_n(x) - S_{n+1}(x)| \leqslant M_n$ ، وإذا كانـت ΣM_nمتقــاربـة فإن المتتـالية $\{S_n\}$ تتقـارب بانتـظام في E . لأنـه إذا كانت $m > n$ فإن $|S_n(x) - S_m(x)| \leqslant M_n + M_{n+1} + ... + M_m$ والمـجـمـوع في الجـهــة الـيمـنـى صغـير بالقـدر الـذى نرغبـه في حالـة كون m و n كبـيرة بقدر كافٍ . هذا يسمى باختيار فيرشـتراس (Weierstrass M-test) وعـادة يذكر بالصيغة التالية **إذا كانت C_n دوال نطاقــهـا** E و $|C_n(x)| \leqslant M_n$ لجمــيع قيم x في E (نــنــوه هنــا أن M_n مستقلة عن المتغير x) **فإن ΣC_n تتقارب بانتظام إذا كانت السلسلة ΣM_n متقاربة** .

نستخدم في معظم الأحيان نوعاً آخر من التقارب : التقارب النقطي بالإضافة إلى **المحـدوديـة المنتـظمة** (Uniform boundedness) أي المحدودة حسب مسافة B_E

نسمى ذلك التقارب المحدود (Bounded convergence) . على سبيل المثال المتتالية $\{S_n\}$ حيث $S_n(x) = x^n$ متقاربة محدودة في $[0, 1]$ على الرغم من كونها متقاربه بانتظام فقط في كل فترة $[0, a]$ حيث $0 < a < 1$. إذا كانت $S_n(x) = n\, x^n$ فالمتتالية $\{S_n\}$ لاتزال متقاربة بانتظام في كل فترة $[0, a]$ حيث $0 < a < 1$ ، لكنها غير متقاربة محدودة في $[0, 1)$.

تمرين (١٦-٢)
اثبت أن نهاية متتالية (من الدوال) متقاربة محدودة تكون محدودة .

١٧ - التقارب المنتظم

إن أهم استعمالات التقارب المنتظم تكمن في أن **نهاية متتالية متقاربة بانتظام من الدوال المستمرة تكون مستمرة**. بالإمكان ذكر الحقيقة السابقة بدقة أكثر وذلك بالقول إن **الفضاء C_E كامل (Complete)** . إثبات ذلك ليس بالصعب وفي الحقيقة سوف نثبت حقيقة أعم قليلاً من ذلك ومفيدة في بعض الأحيان: **إذا كانت كل S_n مستمرة عند X_1 وكانت $\{S_n\}$ متقاربة بانتظام في جوار للنقطة X_1**. أولاً نلاحظ كما ذكرنا سابقا أن التقارب المنتظم يقتضى التقارب النقطي، لذا فالدالة L موجودة لنفرض أن D تمثل دالة المسافة في الفضاء B_E. لذلك كل ϵ موجب فإن.

$$|L(x_1) - L(x_2)| \leqslant |L(x_1) - S_n(x_1)| + |L(x_2) - S_n(x_2)| + |S_n(x_1) - S_n(x_2)|$$
$$\leqslant D(L, S_n) + D(L, S_n) + |S_n(x_1) - S_n(x_2)|.$$

بالإمكان جعل أول حدين في الجهة اليمنى أقل من $\epsilon/3$ وذلك باختيار n كبيرة بقدركافٍ، لأن $\{S_n\}$ متقاربة بانتظام بعد هذا الاختيار للعدد n نثبته. بما أن كل S_n مستمرة عند x_1 فإن الحد الأخير (في الجهه اليمنى) لايزيد عن $\epsilon/3$ إذا $d(x_1, x_2) < \delta$. يقتضى $|L(x_1) - L(x_2)| < \epsilon$ وبالتالي L مستمرة عند x_1 .

بالطبع نهاية متتالية متقاربة بغير انتظام من الدوال المستمرة قد تكون دالة مستمرة. على سبيل المثال المتتالية $\{S_n\}$ حيث $S_n(x) = n\, x^n(1 - x)$ متقاربة بغير

انتـظام ولكن نهايتهـا الـدالة المستمرة 0 . ولكن تحت شـروط إضافية من الممكن استنتاج أن التقارب منتظم إذا كانت النهاية دالة مستمرة. مثلاً إذا كانت متتالية من الدوال المستمرة تتقارب باطراد (Monotonically) إلى دالة مستمرة في فترة متراصة من R_1 فإن التقـارب لابد وأن يكون منتظما [٢١]؟ الافتراض أن التقارب مطرد يعنى إما $S_n(x) \leqslant S_{n+1}(x)$ أو $S_n(x) \geqslant S_{n+1}(x)$ لكل n ولجميع قيم x في الفترة.

لنفترض أن $S_n(x) \geqslant S_{n+1}(x)$ وإذا رمزنا للنهاية بـ L فإن $S_n(x) - L(x) \geqslant 0$. إذا كان التقارب غير منتظم فإن $\max_x[s_n(x) - L(x)]$ لايقترب من الصفر وبالتالي توجـد متتالية من الأعداد n حيث $\max_x[S_n(x) - L(x)] > b > 0$. بما أن $S_n - L$ دالة مستمرة فهى تأخذ قيمتها العظمى عند نقطة x_n. باستخدام تمرين (٨-٨) نستطيع اخـتيار متتـــالية $\{y_k\}$ من المجمـــوعـــة $\{X_n\}$ نهايتهـــا Z . لذا فإن $S_k(y_k) - L(y_k) > b$ وبـالتـالي $S_n(y_k) - L(y_k) > b$ لكـل $n < k$ (في هذه الخـطوة فقط استعملنـا المـتراجحة $(S_n(x) \geqslant S_{n+1}(x))$. دع $k \to \infty$ حيث n ثابتة لكى نحصل على $S_n(Z) - L(Z) \geqslant b$ لكـل قيم n وذلـك لأن $S_n - L$ دالـة مستمـرة. من جهـة أخرى $S_n(Z) - L(Z) \to 0$ لأن المتتالية متقاربة عند النقطة Z ، لذلك فالافتراض أن التقارب غير منتظم يؤدي إلى تناقض.

يوجـد شـرط آخـر يؤدي إلى نفس النتيجة وهو أن الدوال S_n تكون مطردة (الاستمرار ليس ضرورياً). بدقة أكثر دع $S_n \to L$ نقطياً في الفترة المتراصة $[a, b]$ ولنفترض أن L مستمرة وأن جميع الدوال S_n غير تناقصية فإن $S_n \to L$ بانتظام.

اثبات هذه النظرية يتطلب بعض الحقائق من أجزاء قادمة ولكن لمناسبتها في هذا المقام فسنثبتها الآن. لنفرض أن $\in$ عدد موجب ونختار مجموعة منتهية من النقاط x_k في $[a, b]$ بحـــيـث $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$ و $0 \leqslant L(x_k) - L(x_{k-1}) < \in$ لكـــل $k = 2, 3, \ldots, m$. بما أن L مستمـرة بانتـظام (راجـع بند ١٩) وغير تناقصية فإن المـتراجحات تبقى صحيحة إذا كانت المسافة بين أى نقطتين x_k متتاليتن صغيرة بقدر كاف. بالإضـافة إلى ذلك فإن $0 \leqslant L(x_k) - L(x) < \in$ لكل $x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k$. لأن L غير تناقصية. الآن بما أن المتتالية من الدوال $\{S_n\}$ تتقارب نقطياً وبما أنه يوجد عدد منته من النقـاط x_k فبا ستطاعتنا اختيار n كبيرة للغاية بحيث $|S_n(x_k) - L(x_k)| < \in$ لجميع

قيم K . بما أن أى x تقع في إحدى الفترات $[x_{k-1}, x_k]$ وبما أن L غير تناقصية فإن

$$S_n(x) \leqslant S_n(x_k) \leqslant L(x_k) + \epsilon \leqslant L(x) + 2\epsilon$$

وذلـك باستخـدام الحقـائق التـالية على الـترتيب: S_n غير تنـاقصية والمـتراجحة $S_n(x_k) \leqslant L(x_k) + \epsilon$ والمتراجحة $L(x_k) \leqslant L(x) + \epsilon$ والتي تتبع مما ذكرناه أعلاه. وبالمثل

$$L(x) - 2\epsilon \leqslant L(x_{k-1}) - \epsilon \leqslant S_n(x_{k-1}) \leqslant S_n(x)$$

هذه المتراجحات في حالة كون n كبيرة بقدر كاف تقتضى :

$$|S_n(x) - L(X)| \leqslant 2\epsilon$$

لكل x في $[a, b]$ وهذا هو تعريف التقارب المنتظم للمتتالية $\{S_n\}$.

نهاية متتالية من الدوال غير المستمره ربما تكون مستمرة أو غير مستمرة بغض النظر عن كون التقارب منتظمًا أو غير منتظم.

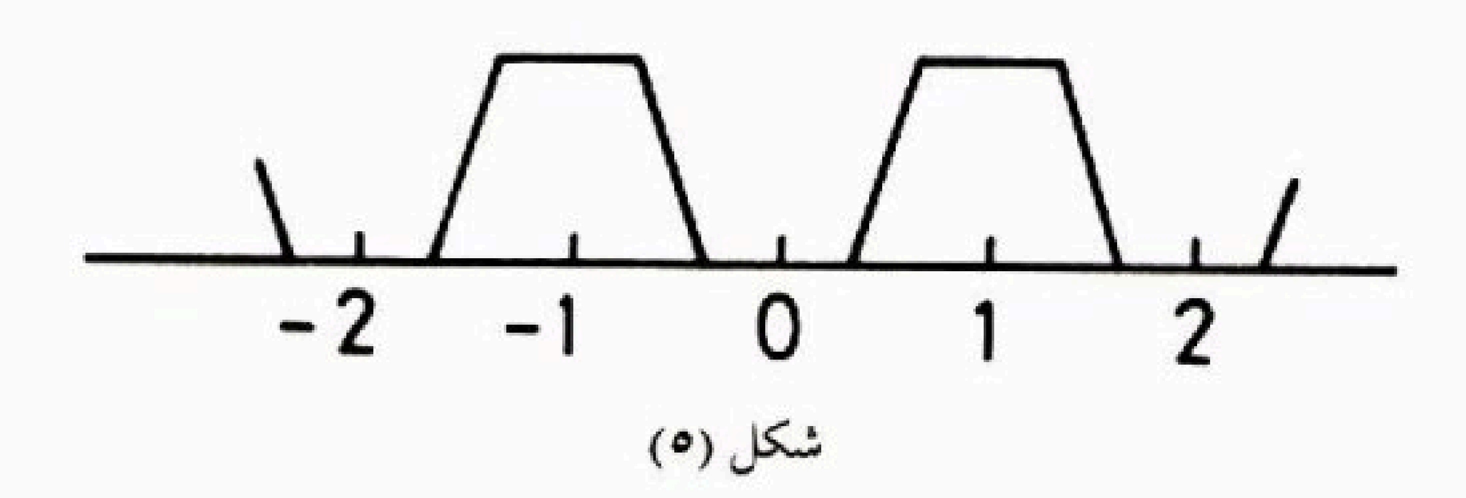
إن أحد أسباب أهمية فكرة التقارب المنتظم هو أنه يعطينا طريقة مناسبة لبناء دالة ذات خاصية معينة وذلك عن طريق جعلها نهاية لدوال متقاربة بانتظام ليس لها بالضرورة تلك الخاصية.

كتوضيح لهذا المبدأ (الذى يسمى في بعض الأحيان تكثيف النقاط الشاذة) (The Condensation of Singularities) **سوف ننشىء منحنياً مستمراً يمر بكل نقطة في مساحة من المستوى** (هذه المنحنيات التى تغطى مساحة معينة عادة تسمى منحنيات بيانو Peano) . لابد في الحقيقة من أن نعرف في البداية ماذا يقصد بالجملة «منحنى مستمـر» . لكن في المقـابل سوف نستخلص من هذا البناء هو أن التعريف الطبيعي لمنحنى مستمر ربما يؤدي إلى شيء لايتوافق مع بديهيتنا لما يجب أن يكون عليه شكل المنحنى المستمر[٢٢] .

الطريقة المعتادة لتعريف منحنى مستمر في R_2 هو أن نقول إنه صورة مستمرة لقـطعة مستقيم أي أنه مجموعة قيم لدالة مستمرة معرفة على فترة مغلقة مناسبة مثل

في R_1 [0, 1]. بالطبع ربما دوال مختلفة تعطي نفس الصورة ولكن هذا لاعلاقة لنا به هنا. لكن سوف نثبت أنه يوجد على الأقل دالة واحدة بحيث أن صورة فترة تغطي كل نقطة في مربع، في الحقيقة بعض النقاط تغطي أكثر من مرة سوف نمثل النقاط P في الصورة بواسطة إحداثياتها. لنفترض أن $(x(t), y(t))$ هي صورة النقطة t في النطاق وهذا يعني أننا اصطلحنا على أن المنحني المستمر معرف بالمعادلتين $x = x(t)$ و $y = y(t)$ حيث x و y مستمرتان.

الآن سوف ننشيء منحنياً مستمراً حسب هذا التعريف ليمر بكل نقطة في المربع $0 \leqslant x \leqslant 1$ ، $0 \leqslant y \leqslant 1$. في الحقيقة هذا المنحنى سيمر ببعض النقاط في المربع أربع مرات. بالإمكان تعديل البناء للحصول على منحنى يمر ببعض النقاط ثلاث مرات على أسوأ الأحوال وهذا هو أحسن مايمكن الحصول عليه كما يقتضيه علم التبولوجيا[٢٣].



شكل (٥)

سوف نتأكد هنا من أن المنحنى يمر ببعض النقاط مرتين على الأقل أي أنه لايوجد تناظر أحادي من قطعة المستقيم إلى المربع ويكون شاملاً في نفس الوقت.

سوف نعتمد في بنائنا[٢٤] على خواص الدالة f المستمرة والزوجية والدورية التى دورتها 2 والتى تساوي الصفر في $[0, \frac{1}{3}]$ وتساوي الواحد في $[\frac{2}{3}, 1]$ وخطية في $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ كما في شكل (٥). الآن لنعرف دالتين x و y كالتالي:

$$x(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2^2} f(3^2)t + \frac{1}{2^3} f(3^4 t) + \dots$$

$$y(t) = \frac{1}{2} f(3t) + \frac{1}{2^2} f(3^3 t) + \frac{1}{2^3} f(3^5 t) + \dots$$

كلتـا السلسلتـين متقـاربة بانتظام (راجع اختبار فيرشتراس)، لذلك فإن x و y دالتان مستمرتان.

ليكن $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$ و $0 \leqslant y_0 \leqslant 1$ ومثل x_0 و y_0 عشرياً في النظام الثنائي راجع بند (٦):

$$x_0 = 0 . a_0a_2a_4 \ldots$$

$$y_0 = 0 . a_1a_3a_5 \ldots$$

الآن نعـرف الـعـدد t_0 عن طريق نشره في الـنـظام الـثـلاثـي ليكـون $t_0 = 0.(2a_0)(2a_1)(2a_2) \ldots$ أي بمضاعفة الخانات الثنائية لكل من x_0 و y_0 ومداخلتها مع بعض ومن ثم قراءة النتيجة في النظام الثلاثي. الآن نثبت أن $x(t_0) = x_0$ وأن $y(t_0) = y_0$ لذلـك فالمنحنى الـذي معـادلتـاه الوسيطيتان هما $x = x(t)$ و $y = y(t)$ يمر بالنقطة (x_0, y_0).

للحصـول على هذا سنـبرهن أن $f(3^kt_0) = a_k$ لكل $k = 0, 1, 2, \ldots$ ولذلك يكون واضحاً من تعريف $x(t_0)$ و $y(t_0)$ أن $x(t_0) = x_0$ و $y(t_0) = y_0$. الآن a_k إما صفر أو واحد. إذا كان $a_k = 0$ فالعدد الممثل بـ $0.(2a_k)(2a_{k+1}) \ldots$ (في النظام الثلاثي) يقع بين 0 و ⅓ ولذلك $f(3^kt_0) = f(0.(2a_k)(2a_{k+1}) \ldots) = 0$، وإذا كان $a_k = 1$ فالعدد الممثـل بـ $0.(2a_k)(2a_{k+1}) \ldots$ (في النـظام الثـلاثي) يقـع بين ⅔ و 1 ولـذلـك $f(3^kt_0) = 1$.

الآن نثبت أنـه **لايوجد منحنى مستمر يمر بكل نقطة من مربع لمرة واحدة فقط**. إذا افـترضنـا وجود منحنى بتلك الخاصية فإنه سيكون صورة لدالة أحادية نـطاقهـا فترة في R_1 (مثلاً $[0, 1]$) ومدارها مربع في R_2. النظرية الموجودة بند **١٤** تبين أن الدالة لها معكوس مستمر. بما أن الدالة ومعكوسها تتمتعان بخاصية أن معكوس صورة مجموعة مفتوحة يكون مفتوح فإنه أيضاً صحيح أن صورة أي مجموعة مفتوحة تكون مفتوحة. لنأخذ المجموعتين المفتوحتين $(0, \frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{2}, 1)$ في R_1 والتي إغلاقهما له نقطة مشتركة واحدة. صورتيهما في R_2 المجموعتان المفتوحتان E_1 و E_2 واللتان تغـطيان مربعـاً ما عدا نقـطة واحدة P . إذا أخذنا جواراً في E_1 وآخر في E_2 فإنه

بالإمكان رسم قطعة خط مستقيم في المربع يصل بين نقطة ما في الجوار الأول وأخرى في الجوار الثاني ولا يمر بالنقطة P . لذا نحصل على مجموعتين منفصلتين غير خاليتين كلاهما مفتوحة ويغطيان قطعة المستقيم وهذا يناقض صفة الترابط Connectedness في R_1 وبالتالي يستحيل وجود ذلك المنحنى.

من جهة أخرى فقد بينا في بند ٣ أنه يوجد تناظر أحادي بين فترة ومربع ومما سبق أعلاه يتضح أنه (المنحنى) لا يمكن أن يكون مستمراً.

هناك نظرية أخرى مفيدة تتعلق بمفهوم التقارب المنتظم يمكن كتابتها كالتالي:

بالإمكان مكاملة المتتالية المتقاربة بانتظام حداً حداً: بدقة أكثر، إذا كانت f_n دوال على فترة محدودة من I إلى R_1 وإذا كان $f_n \to f$ بانتظام في I وإذا كانت كل f_n قابله للتكامل حسب مفهوم ريمان Riemann في I فإن:

$$\int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx$$

اثبات ذلك سهل ومباشر إذا عرفنا أن f قابلة للتكامل. إذا كانت $I = [a, b]$ نحصل على

$$\left|\int_I f_n(x)dx - \int_I f(x)dx\right| = \left|\int_I (f_n(x) - f(x))dx\right|$$

$$\leqslant \int_I |f_n(x) - f(x)|dx$$

$$\leqslant (b-a)\sup_x|f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

نفس الاثبات يبين أن المتتالية من التكاملات $\int_a^y f_n(x)dx$ تتقارب بانتظام. إذا كانت كل f_n مستمرة فإن f مستمرة (راجع بند ١٦) وبالتالي قابلة للتكامل.

بشكل عام اثبات أن نهاية متتالية من الدوال القابلة للتكامل تكون قابلة للتكامل يتطلب بعض المعلومات من نظرية التكامل Theory of integration التي لانتطرق لها في هذا الكتاب. في الحقيقة إنه من غير المجدي أن نثبتها بالنسبة لتكامل

ريمان لأنه لو اسخدمنا تكامل ليبيج Lebesque لحصلنا على نظرية أقوى بكثير: إذا كانت كل f_n قابلة للتكامل حسب مفهوم ليبيج وإذا كان $f_n \to f$ في فترة محدودة I فإن f قابلة للتكامل وكذلك فإن

$$\int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx$$

في الحقيقة يكفي أن نفترض أن $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ حيث g قابلة للتكامل.

لنحصل على النظرية السابقة. (في هذه الحالة نقول إن $\{f_n\}$ تتقارب بسيطرة Converges dominatedly وهذا هو أحد الأسباب لتفضيل تكامل ليبيج على تكامل ريمان.

على كل حال فإن أبسط الحالات حيث يكون لدينا متتالية متقاربة بانتظام من الدوال المستمرة لها تطبيقات عديدة وجيدة، هذه واحدة منها:

لنفرض أن f دالة قابلة للتفاضل من جميع الرتب وبذلك تكون جميعها مستمرة (راجع بند ٢٠).

ولنفرض أن $\lim_{n \to \infty} f^{(n)} = L$ موجودة بانتظام من جهة نحصل على

$$\int_a^x f^{(n)}(t)dt = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) \to L(x) - L(a)$$

ومن جهة أخرى فإن:

$$\int_a^x f^{(n)}(t)dt \to \int_a^x L(t)dt$$

وذلك بتطبيق النظرية المتعلقة بتكامل متتالية متقاربة بانتظام، لذلك $\int_a^x L(t)dt = L(x) - L(a)$ وبالتالي فإن $L(x) = L'(x)$ أي أن $L(x) = ce^x$. لذا فإن **أي تفاضل من رتبة لانهائية لابد وأن يكون دالة أسية بسيطة**[٢٥] (يدخل في ذلك الحالة عندما تكون مطابقة للصفر) بغض النظر عن الدالة الأصلية.

نستخدم في معظم الأحيان نفس النظرية عن التقارب المنتظم لإثبات نظرية عن التفاضل حداً حداً لمتتالية من الدوال. **إذا كانت للدوال f_n مشتقات مستمرة في فترة I وإذا كانت $\{f_n(a)\}$ متقاربة لنقطة a في I وإذا كانت $\{f_n'\}$** تتقارب بانتظام فإن

f_n تتقارب بانتظام لنهاية f قابلة للتفاضل وأن $\lim f'_n = f'$.

تحت الشروط التي ذكرناها أعلاه لنفترض أن $f'_n \to g$ لنحصل على

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n(t)dt \to \int_a^x g(t)dt$$

بما أن $f_n(a) \to f(a)$ فإن $f_n(x)$ متقاربة لكل x . في الواقع

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_n(a) - f_m(x) + f_m(a) + f_n(a) - f_m(a)| \\
&\leqslant |f_n(x) - f_n(a) - f_m(x) + f_m(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| \\
&\to |\int_a^x g(t)dt - \int_a^x g(t)dt| = 0
\end{aligned}$$

لذا فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام . الآن

$$f_n(x) - f_n(a) \to f(x) - f(a)$$

إذن $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt$. لذلك فإن f قابلة للتفاضل وأن $f'(x) = g(x)$. سوف نقبل بديهياً الحقيقة القائلة إن اشتقاق التكامل اللامحدود لدالة مستمرة يعطينا الدالة المكاملة (الأصلية) .

فيما بعد (بند ٢١) سنثبت نظرية أعم من ذلك حيث لانشترط استمرارية f'_n النقطة في عمل كهذا هو أنه دالة f ربما تكون قابلة للتفاضل عند كل نقطة ولكن اشتقاقها غير قابل للتكامل حيب مفهوم ريمان أو ليبيج للتكامل . مثلاً لو أخذنا الدالة $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ لكل $x \neq 0$ و $f(0) = 0$ فإن f' غير محدودة وبالتالي غير قابلة للتكامل الريماني أو الليبيجي .

تمرين (١٧-١)

إذا كانت دالة f من R_1 إلى R_1 قابله للتفاضل من جميع الرتب وكانت السلسله . $\ldots + f'(x) + f(x) + \int_0^x f(t)dt + \int_0^x dt \int_0^t f(u)du + \ldots$ متقاربه بانتظام فاوجد مجموعها[٢٦] . التطبيقات المختلفة التي ذكرناها للتقارب المنتظم كانت صيغاً معينة

تحت شروط مختلفة لإمكانية أخذ النهايات حداً حداً لمتتالية متقاربة بانتظام وهذا تطبيق آخر.

تمرين (١٧-١أ)

اثبت نظرية تانـري Tannery : إذا كانت $f_n(k) \to L_n$ عنـدما $k \to \infty$ لكل n وإذا $|f_n(k)| \leqslant M_n$ لكـل k بحيث تكـون ΣM_n متقـاربة فإنه إذا كانت $p = p(k) \to \infty$ عناما $k \to \infty$ فإننا نحصل على

$$\lim_{k\to\infty} \{f_1(k) + f_2(k) + \dots f_p(k)\} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n$$

تمرين (١٧-١ب)

(تطبيق) اثبـت أن

$$\lim_{k\to\infty} (1 + x/k)^k = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!$$

هناك حالات سهلة حيث النظرية المذكورة في (بند ١٦) بخصوص التكامل حداً حداً لمتتالية متقاربة بانتظام غير ملائمة، فعلى سبيل المثال.

$$1 - x + x^2 - \dots + (-x)^n = [1-(-x)^{n+1}]/(1 + x)$$

وبالتالي

$$|x| < 1 \text{ إذا كانت } 1 - x + x^2 - \dots = \frac{1}{1-x}$$

الآن

$$\log 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 dx - \int_0^1 \times dx + \int_0^1 x^2 dx - \dots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \dots$$

لايمكن تبرير هذه الخطوة بالرجـوع إلى النظرية عن التقارب المنتظم لأن المتتـالية $\{f_n\}$ حيث $f_n(x) = [1-(-x)^n]/(1 +x)$ غير متقـاربة بانتظام في $[0, 1]$ (لأنها

غير متقاربة أصلاً عند 1 ، ولاحتى في $[0, 1]$. في الواقع لوكانت كذلك فإن القيمة العـظمى على $[0, 1)$ للكمية $|x|^n/(1 + x)$ تؤول للصفر عندما $n \to \infty$ ، ولكن $|x|^n/(1 + x) \geqslant 1/2\, |x|^n$ فالقيمـة العـظمى تكـون على الأقـل $1/2$ ولـذلـك لايمكن أن تؤول للصفر. تجدر الإشارة إلى أنه بالنسبة للمثال السابق يمكن بسهولة التاكد من النتيجـة بدون الـرجوع إلى نظرية التقارب المحدود (والتي يمكن تطبيقها لأن $|[1 -(- x)^n]/(1 + x)| \leqslant 2$) . والآن

$$1 - 1/2 + 1/3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,dx.$$

$$\left|1 - 1/2 + 1/3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \log 2\right| \leqslant \left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,dx\right| \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0$$

هذه الحسـابات اعلاه تبين أمرين في وقت واحد، أولاً أن السلسلة $1 - 1/2 + 1/3 - \ldots$ متقاربة وثانياً أن مجموعها يساوي $\log 2$.

ربما يخمن القارىء عند هذه النقطة أنه إذا حصلنا على نتيجة محددة بمكاملة متتالية متقاربة حداً حداً فهي بالضرورة النتيجة الصحيحة. هذا ليس صحيحاً، فعـلى الـرغم من صحتـه لمتسلسلات القوة، فإنه من الصعب إعطاء مثال مخالف Counter example لايبـدو وكـأنه مصطنع. على كل حال إذا كانت f_n دالة معرفة بالصيغـة $f_n(x) = n$ لكل $0 < x < 1/n$ و $f_n(x) = 0$ فيما عدا ذلك، فإن $f_n(x) \to 0$ لكـل x بينـما $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ لذلـك $\lim \int_0^1 f_n(x)dx$ و $\int_0^1 \lim f_n(x)dx$ موجودان ومختلفان.

تمرين (١٧-٢)

ابحث عن مثال لدوال مستمرة f_n له نفس الظاهرة السابقة.

بطريقة مشابهة ليس من الصعب (على الرغم من أننا لن نقوم به) اثبات أن $\sum \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ لكل $0 < x < \Pi$. مكاملة الطرفين ينتج عنها

$$\tfrac{1}{4}\pi^2 = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$$

وبذلك نحصل على طريقة سهلة لجمع السلسلة العددية

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

بما أنـه بالإمكـان إثبـات أن السلسلة الأصلية أعـلاه غير متقـاربة بانتظام فتبرير الخطوات السابقة يخرج عن نطاق هذا الكتاب. لكن من جهة أخرى من الممكن إثبات أن السلسلة $\Sigma\, n^{-1} \sin nx$ متقاربة محدودة لذا فالنظرية الخاصة بمكاملة هذا النوع من المتتاليات كافية لهذا الغرض.

١٨ - النهايات النقطية لدوال مستمرة(٢٧)
(Pointwise Limits of Continuous Functions)

لنعتبر دوال من فترة في R_1 إلى R_1. **على الرغم من أن النهاية النقطية لدوال مستمرة قد لاتكون مستمرة** لكنه، كما سنثبت الآن، لايمكن أن تكون غير مستمرة بقدر كبير: **أي أن النقاط التي تكون فيها النهاية مستمرة لابد وأن تكون على الأقل مجموعة كثيفة في كل مكان**. (لذلك فالدالة غير المستمرة في أي مكان والمذكورة في (بند ١٢) والتي حصلنا عليها من دوال مستمرة بأخذ النهاية مرتين متتابعتين لايمكن الحصول عليها عن طريق أخذ النهايه مرة واحدة فقط لدوال مستمرة).

نبدأ بملاحظة أنه إذا كانت دالة غير مستمرة عند نقطة x فإن صورة جوار اختياري صغـير للنقطة x ليس لها قطر اختياري صغير. أي أنه يوجد عدد طبيعي n بحيث أن قطر أي جوار لـ x يكون على الأقل $1/n$. (من البديهي أن لصورة جوار كبير قطر كبير لذلك يمكننا أن نقول «كل جوار» بدلاً من «جوار صغير»). الآن لنفترض أن f غير مستمرة عند كل نقطة من فترة وأن E_n المجموعة من النقاط في هذه الفترة بحيث أن قطر صورة كل جوار لـ x يساوي على الأقل $1/n$. كما بينا أعلاه

فإن كل x تنتمي إلى إحدى المجموعات E_n ، كذلك فإن كل E_n مغلقة، لأنه إذا كانت y نقطة نهاية لـ E_n فإن كل جوار للنقطة y يحتوي على x في E_n ولذا يحتوي على جوار لـ x وبالتالي فإن قطر صورة كل جوار للنقطة y يساوي على الأقل $1/n$. نستخدم الآن نظرية بير Baire والتي تقول بأن إحدى E_n تكون كثيفة في فترة جزئية J . بما أن E_n مغلقة فهي تحتوي J . لذا فالفترة J تتميز بخاصية أن صورة كل فترة جزئية من J قطرها يساوي $1/n$ على الأقل. وجود مثل هذه الفترة J يكون إذن نتيجة لكون f غير مستمرة عند كل نقطة من فترة ما . الآن نثبت أن النهاية النقطية لدوال مستمرة لايمكن أن تملك مثل تلك الفترة وبالتالي لايمكن أن تكون غير مستمرة عند كل نقطة من أي فترة .

بما أن نطاق f مجموعة جزئية من R_1 فإنه بالإمكان تغطيتها بعدد قابل للعد من الفترات $I_n = (a_n, b_n)$ طول كل منها أقل من $1/n$. لنفحص الصورة العكسية H_n للفترة I_n: اتحاد المجموعات H_n يغطي الفترة J لكن اي منها لايمكن أن يحتوي على فترة جزئية من J لأن كل صور الفترات الجزئية من J لها أقطار أكبر من $1/n$. من جهة أخرى نظرية بير تبين أن إحدى المجموعات H_n كثيفة في فترة جزئية من J . لو عرفنا أن H_n مغلقة لحصلنا على تعارض لأن المجموعة المغلقة والكثيفة في فترة تحوي تلك الفترة.

لايوجد سبب يدعونا للاعتقاد بأن H_n مغلقة حتى ولو كانت f نهاية نقطية لدوال مستمرة. على كل بإمكاننا أن نبين أن كل H_n هي اتحاد عدد قابل للعد من المجموعات المغلقة وهذا يفي بالغرض تماماً، لأنه إذا كانت للمجموعة H_n هذه الخاصية فبتطبيق نظرية بير مرة أخرى فإن إحدى المجموعات المغلقة كثيفة في فترة جزئية من J وبالتالي تحوي تلك الفترة الجزئية. بما أن المجموعات هي مجموعات جزئية من H_n فإن H_n تحوي أيضا فترة جزئية من J .

لذلك فقد اختزلنا إثبات النظرية إلى النقطة التي نبين فيها أنه،إذا كانت f نهاية نقطية لدوال مستمرة f_k فإن المجموعات H_n هي اتحاد عدد قابل للعد من المجموعات المغلقة. لنتذكر أن H_n هي معكوس صورة الفترة (a_n, b_n) أي أن H_n هي مجموعة من النقاط بحيث $a_n < f(x) < b_n$. لنأخذ x في H_n . إذا كانت J كبيرة بقدر كاف

فإن $a_n + 1/(2_j) \leqslant f(x) \leqslant b_n - 1/(2_j)$ لأن $a_n < f(x) < b_n$. بما أن $f_k(x) \to f(x)$ لذا فإن $a_n + 1/_j \leqslant f_k(x) \leqslant b_n - 1/j$ لكـل عدد k كبير بقدر كاف. لتكن $E_{k,j}$ المجموعة التي عنـاصرها تحقق المتراجحة الأخيرة و $F_{m,j}$ تقاطع كل من $E_{m,j}, E_{m+1,j}, E_{m+2,j}, \ldots$. المجمـوعـات $E_{k,j}$ مغلقـة لأنها صورة عكسية لفترات مغلقة والدالة f_k مستمرة، وكذلك المجموعات $f_{m,j}$ مغلقة لكونها تقاطع مجموعات مغلقة. لقد رأينا آنفاً أنه إذا كانت x في H_n فإن x في إحدى المجموعات $f_{m,j}$. أي أن H_n مجموعة جزئية من اتحاد جميع $F_{m,j}$. من جهـة أخـرى إذا كانـت x في إحـدى $F_{m,j}$ فإن $a_n + 1/j \leqslant f_k(x) \leqslant b_n - 1/j$ لعـدد ما j ولـكـل عدد k كبـير بقـدر كاف. بما أن $f_k(x) \to f(x)$ فإن هذا يؤدي إلى أن $a_n + 1/j \leqslant f(x) \leqslant b_n - 1/j$ ولـذا $x \in H_n$. بالتـالي فإن H_n مطابقة لإتمام جميع $F_{m,j}$ لكل الأعداد الطبيعية j, m . لذا نجحنـا في تمثيل H_n كاتحـاد عدد قابـل للعد من المجموعات المغلقة وهذا هو المطلوب لإكمال الاثبات.

إن تغييراً طفيفـاً في الاثبات السابق يبين أن نقاط استمرار نهاية متتالية من الدوال المستمرة تكون مجموعة كثيفة في كل مكان في كل مجموعة تامة وغير خالية. بهذه الصيغة نحصل على أن العكس صحيح: أي أن الدالة التي نقاط استمرارها كثيفة في كل مجموعة تامة وغير خالية بالإمكان تمثيلها كنهاية لدوال مستمرة.

بير وصف النهايات غير المستمرة لدوال مستمرة على أنها من فئة 1 والنهايات لدوال من فئة 1 والتي نفسها (النهايات) ليست من فئة 1 على أنها من فئة 2 وهكذا في الحقيقة يوجد دوال لاتنتمي إلى أي فئة (من فئات بير Baire) . مثال شيق لدالة من فئة 1 لبير هو أي دالة غير مستمرة في R_2 بحيث تكون مستمرة في كل خط يوازى أحد الإحداثيات[٢٧أ] .

تمرين (١٨-١)

أعط مثالاً لتلك الدالة.

من العجيب أنه على الرغم من أننا بينا فقط أن للنهاية النقطية لدوال مستمرة مجموعة كثيفة في كل مكان من نقاط الاستمرار، فإن أكثر من ذلك صحيح أيضاً:

مجموعة النقاط التي لاتحقق عندها الاستمرار لابد وأن تكون مجموعة من الفئة الأولى. هذه الخاصية لاعلاقة لها بكون الدالة المعنية هي نهاية نقطية لدوال مستمرة. في الحقيقة سوف نبين أن الدالة الحقيقة f التي نطاقها فترة في R_1 إذا كانت مستمرة عند نقاط تكون مجموعة كثيفة في كل مكان فإنها مستمرة ماعدا في مجموعة من الفئة الأولى.

لنعتبر المجموعات E_n من النقاط x حيث توجد متتالية $\{y_k\}$ نهايتها x وتحقق $|f(y_k) - f(x)| > \frac{1}{n}$. كل نقطة عدم استمرار تكون في إحدى E_n أي أن مجموعة نقاط عدم الاستمرار محتواة في اتحاد E_n. بما أنه يوجد عدد قابل للعد من E_n فالنظرية متحققة إذا أثبتنا أن كل E_n مخلخلة. في حالة أن إحدى المجموعات E_n غير مخلخلة فإنه توجد نقطة x ، حيث f مستمرة عندها، وتكون نقطة نهاية لهذه المجموعة E_n إذا اخترنا δ موجبة بحيث $|y - x| < \delta$ فهذا يؤدى إلى أن $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2n}$ وإذا اخترنا نقطة w في E_n بحيث $|w - x| < \frac{1}{2}\delta$ وكانت y_k هي النقاط التي تنتمي إلى E_n فإن $|f(y_k) - f(w)| \leqslant |f(y_k) - f(x)| + |f(x) - f(w)| < \frac{1}{n}$ إذا كان k عدداً كبيراً بقدر كاف فيه، وهذا يتعارض مع تعريف E_n.

١٩ - تقريب الدوال المستمرة
(Approximations Continuous Function)

لقد رأينا في بند ١٠ أنه رغم استمرار دالة من R_1 إلى R_1 فإن منحناها قد يكون غير منتظم على الأقل للدرجة التي يكون فيها متذبذب في كل فترة. من جهة أخرى يوجد دائمًا دالة منحناها ممهداً تماماً حيث إنه قريب جداً لمنحنى الدالة المستمرة المعطاة. بدقة أكثر **إذا كان نطاق دالة مستمرة فترة متراصة فبالإمكان إيجاد دالة قريبة من الدالة المعطاة وتكون دالة درجية أو دالة مستمرة مضلعة أو كثيرة حدود**. منحنى الدالة الدرجية مكون من عدد منته من القطع المستقيمة الأفقية بينما منحنى الدالة المضلعة مكون من عدد منته من القطع المستقيمة في أي اتجاه (غير العمودي). الجملة «بالقدر الذى نرغبه» تفسر حسب المسافة للفضاء B . بمعنى آخر إذا كانت f دالة مستمرة و ∈ أي عدد موجب فإنه توجد دالة درجية f_1 ودالة مستمرة مضلعة f_2 وكثيرة حدود f_3

بحيث $|f(x) - f_k(x)| < \epsilon$ ، $(k = 1, 2, 3)$ لكل x في الفترة المعطاة.

الخاصية التي تجعل مثل هذا التقريب ممكناً تسمى الاستمرار المنتظم. نقول إن دالة f مستمرة عند x إذا كان لكل ϵ موجب توجد δ موجبة بحيث $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ عندما $|x - y| < \delta$ هنا بشكل عام لابد من إيجاد δ أصغر من سابقتها كلما أخذنا نقاطاً مختلفة x. إذا كان دائمًا بالإمكان إيجاد δ (بالنسبة لدالة f معطاة) بحيث تصلح لجميع قيم x في مجموعة معطاة فيقال للدالة f إنها **مستمرة بانتظام في تلك المجموعة** الآن نبرهن **أن الدالة المستمرة تكون مستمرة بانتظام في أي فترة متراصة من نطاقها**. في الواقع سنثبت هذه النظرية في حالة أعم من ذلك بكثير: الدالة المستمرة التي نطاقها ومداها في فضاء متري تكون مستمرة بانتظام في أي فترة جزئية S متراصة من نطاقها.

لإثبــات هذه النـظرية نأخـذ ϵ موجب و N ترمـز لجوار النقـطة x بحيث $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ لكل y في N وليكن M الجوار الذى مركزه x ونصف قطره يساوى نصف قطر N. مجموعة الجوارات M تغطي S وبما أن S متراصة فإن عدداً منتهياً منها يغـطي S أيضا. لتكن هذه الجوارات $M_1, M_2, \ldots, M_n$ وδ أصغر نصف قطر لكل من M_k. لنفترض أن x و y أي نقطتين من S بحيث $d(x, y) < \delta$. بما أن x في إحدى M_k ، وإذن $d(y, z) \leqslant d(x, z) + \delta$ حيث z مركز M_k. بما أن δ أصغر نصف قطر للجوارات M_k فالمتراجحة السابقة تبين أن y في N_k والذى مركزه z. لذلك فالطريقة التي عرَّفنا بها N_k تقتضي $d(f(x), f(y)) \leqslant \epsilon$ و $d(f(y), f(z)) \leqslant \epsilon$ وبالتالي المتراجحة المثلثية تؤدي إلى $d(f(x), f(y)) \leqslant 2\epsilon$.

سنبدأ الآن في بناء الدوال التقريبية الثلاث التي أشـرنا أعلاه إلى وجودها.

لتكن S فترة متراصـة في R_1. لبناء دالة درجية f_1 بحيث $|f_1(x) - f(x)| < \epsilon$ لكل x . بإمكاننا حذف الأجزاء المتداخلة من الجوارات M_k في الإثبات السابق (والتي عبـارة عن فترات في هذه الحالة) وتعريف $f_1(x) = f(y_k)$ في الجزء الباقي من M_k ، حيث y_k هي مركز N_k.

لبناء الدالة المضلعة f_2 احذف أيضاً الأجزاء المتداخلة من M_k وسم الفترات المتبقية (a_k, a_{k+1}) لذا فإن منحنى f_2 هو المضلع الذى روؤسه $(a_k, f(a_k))$.

إن بناء كثيرة الحدود f_3 أصعب نوعاً ما[٢٨]. إحدى الطرق لعمل ذلك كالتالي: لتبسيط الصيغ فقط لنفترض أن نطاق الدالة المستمرة المعطاة هو الفترة $[h, 1 - h]$ حيث $0 < h < 1$. بإمكاننا تمديد Extend الدالة المعطاة بطريقة واضحة بحيث تكون الدالة المحددة مستمرة في R_1 وصفراً خارج $(\frac{1}{2}h, 1 - \frac{1}{2}h)$. لنعتبر الدالة المعرفة بالصيغة

$$I(x) = c_n \int_0^1 f(t)[1 - (x - t)^2]^n dt \quad \text{حيث} \quad 1/c_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt$$

من الواضح أن درجة كثيرة الحدود I تساوى 2n . الحد الذى بين الأقواس المربعة أعلاه يحصل على قيمة العظمى عند $t = x$ ويكون صغيراً عندما تكون t قريبة من x (و n كبيرة)، لذا يبدو بالفعل أن $I(x)$ قريبة من $f(x)$ وهذا ماسنثبته الآن.

نستطيع أن نكتب $I(x)$ كالتالي

$$I(x) = c_n \int_{x-1}^{x} f(x - s)(1 - s^2)^n ds$$

وبما أن $f(t) = 0$ عندما $t < 0$ أو $t > 1$ فإن:

$$I(x) = c_n \int_{-1}^{1} f(x - s)(1 - s^2)^n ds$$

كذلك من تعريف c_n نحصل على

$$I(x) - f(x) = c_n \int_{-1}^{1} [f(x - s) - f(x)](1 - s^2)^n ds .$$

الآن نجزىء التكامل أعلاه إلى ثلاثة أجزاء

$$I_1 = c_n \int_{-1}^{-\delta}, I_2 = c_n \int_{-\delta}^{\delta}, I_3 = c_n \int_{\delta}^{1}$$

حيث $0 < \delta < 1$ وسنختارها بعد قليل.

عند هذه النقطة نستخدم استمرارية f بانتظام: إذا كان ϵ أي عدد موجب

نستطيع أن نجد δ صغيرة بقدر كاف بحيث $|f(x-s)-f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ إذا كان $|s| < \delta$ ، ولاحظ أن المتراجحة متحققة لجميع قيم x بنفس قيمه. الآن نستخدم هذه المتراجحة لتقدير I_2 :

$$|I_2| \leq \frac{1}{3}\,\epsilon c_n \int_{-\delta}^{\delta}(1-s^2)^n ds < \frac{1}{3}\,\epsilon c_n \int_{-1}^{1}(1-s^2)^n ds = \frac{\epsilon}{3}$$

الآن f محدودة لأنها مستمرة على مجموعة متراصة: $|f(x)| \leq M$ بالنسبة لـ I_3 فإن $(1-s^2)^n \leq (1-\delta^2)^n$ بينما

$$1/c_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)dt \geq \int_{0}^{\delta/2}(1-t^2)^n dt \geq \tfrac{1}{2}\delta(1-\tfrac{1}{4}\delta^2)^n$$

لذا فإن

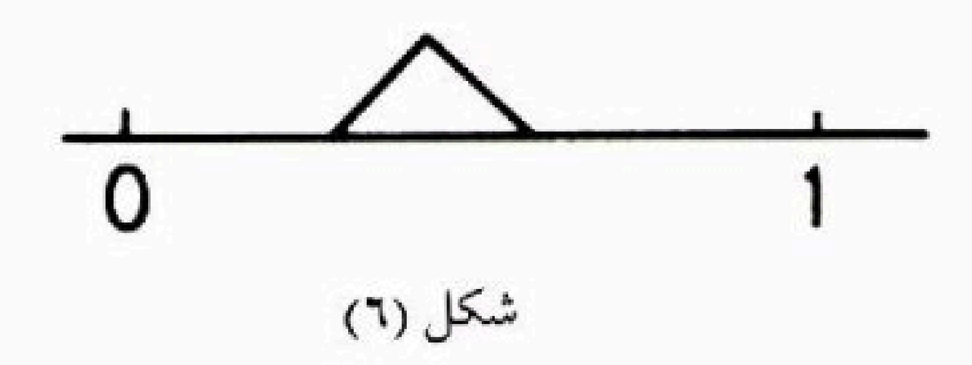
$$|I_3| \leq 2\,c_n M \int_{\delta}^{1}(1-s^2)^n ds \;\; \leq 4M\delta^{-1}(1-\delta^2)^n(1-\tfrac{1}{4}\delta^2)^{-n}$$

بما أن $1 > (1-\delta^2)/(1-\frac{1}{4}\delta^2)$ فإن $I_3 \to 0$ عندما $n \to \infty$. نفس النقاش ينطبق تماماً على I_1 . باخذ n كبيره بقدر كاف نجد أن $|I_1|$ و $|I_3|$ أقل من $\epsilon/3$. لذلك $|I(x)-f(x)| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \leq \epsilon$ في حالة كون n كبيرة بقدر كاف أي أن كثيرة الحدود I تعتبر تقريباً للدالة f إذا كانت n كبيرة بقدر كاف.

إن مفهوم تقريب دالة مستمرة بكثيرة حدود له تطبيقات عدة. لقد استعمل هذا المفهوم في (بند ١٠) لإثبات وجود دالة مستمرة غير قابلة للتفاضل في أي مكان، وفيما يلي تطبيق آخر.

لتكن f دالة معرفة في الفترة $[a, b]$. الكميات $\int_a^b f(x)x^n dx \;\; (n = 0, 1, 2, \ldots)$ تسمى عزوم (Moments of f). سوف نبين أن الدالة المستمرة التي نطاقها مجموعة متراصة في R_1 تتحدد بعزومها، أي أنه **إذا كان لدالتين مستمرتين نفس المتتالية من العزوم فإنهما متطابقتان**. (لانتطرق هنا إلى كيفية حساب الدالة المستمرة من عزومها). الجملة السابقة مكافئة لآن نقول إن الدالة المستمرة التي جميع عزومها مساوية للصفر لابد وأن تساوى الصفر وهذا مانثبته الآن. لنفترض أن جميع عزوم f تساوي

الصفر. لايفقد شيء من التعميم إذا افترضنا أن $a = 0, b = 1$. إذا لم تكن f مطابقة للصفر فإنها موجبة (أو سالبة) في فترة ما وبالإمكان بناء دالة مستمرة g مطابقة للصفر خارج هذه الفترة بحيث $\int_0 fgdx = 2h > 0$. (انظر الشكل ٦).



شكل (٦)

ننشيء في البداية كثيرة حدود p بحيث $|g(x) - p(x)| < h/\max|f(x)|$. إذن

$$\int_0^1 fpdx = \int_0^1 fgdx - \int_0^1 f(g-p)dx$$

$$\geqslant 2h - \max|f(x)| \, . \, \max|g(x) - p(x)| > h$$

لتكن $\int_0^1 fp\,dx = 0$ لأن جميع عزوم f تساوى الصفر. من هذا التعارض نستنتج أن $f = 0$.

كنتيجة للنظرية السابقة عن العزوم نرى أن مجموعة جميع الدوال المستمرة بالإمكان وضعها في تناظر أحادي مع فئة من المتتاليات العددية وذلك لأن للدوال المستمرة المختلفة متتاليات مختلفة من العزوم. بما أن عدد المتتاليات العددية مساو لعدد الأعداد الحقيقية (تمرين ٣-١٠) فإنه توجد دوال مستمرة بنفس عدد الأعداد الحقيقية. (الطريق المباشر للتأكد من ذلك هو ملاحظ أنه يمكن تعيين الدوال المستمرة بقيمها عند الأعداد النسبية أي عن طريق متتالية من الأعداد الحقيقية).

خاصية الاستمرار المنتظم مفيدة أيضا في تبرير تبديل عمليات النهايات في حساب التفاضل والتكامل. على سبيل المثال لتكن f مستمرة نطاقها في R_2 وافترض أن $f(x, b) = L$ لجميع قيم x في فتره ما، أى أن الدالة ثابتة على الخط الأفقي $y = b$ ، فإنه ليس بالضرورة أنه عندما $y \to b$ فالتفاضل الجزئي $\partial f/\partial x$ (عند (x, y)) يؤول إلى الصفر لكل x . (والمثال على ذلك) :

$$f(x, y) = y \sin(1/(xy)),\ f(x, 0) = 0,\ b = 0,\ L = 0$$

قيمة $\partial f/\partial x$ عند (x, y) تساوى $-x^{-2} \cos(1/(xy))$ وهذا لايؤ ول إلى نهاية معينة أى أنه لايمكن أن نكتب

$$\lim_{y \to b} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, b) - f(x, y)}{h}$$

على كل حال المســـاواة الســـابـقـــة صحـيحـــة في أى جوار للنـــقـــطة (a, b) حيث $\partial f/\partial x$ دالـــة مســـتـــمـــرة (أى مســـتـــمـــرة كدالـــة نطاقـهـــا جوار في R_2 ولـيســت مسـتـمـــرة فقط بالـنـسبـــة للمتغـيـر x لكـــل y ومستمـــرة في y لكـــل x ، الحـــالـــة الأخـيرة تعـني الاســـتـــمـــرارية في R_1 لحصر f على خطوط موازية للإحداثيات) . الإثبات يعتمد على استمرارية $\partial f/\partial x$ بانتظام . أولاً لاحظ أن $\partial f/\partial x$ يساوى صفراً عند أى نقطة (x, b) لأن $f(x, b) = L$. ثانياً، نظرية القيمة المتوسطة تؤدى إلى

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x + h', y)$$

حيث $0 < h' < h$. أخـــيراً، $\partial f/\partial x$ عنـــد $(x + h', y)$ يختـلف عن $\partial f/\partial x$ عنـــد (x, b) ، حيث يســاوى الصفـر، بمقدار ضئيل إذا كانت h (ولذا h') و $|y - b|$ قريبين من الصفر بقدر كاف .

٢٠ - الدوال الخطية (Linear Functions)

الدالة f التي نطاقها R_1 **تسمى خطية** إذا كان $f(x) + f(y) = f(x + y)$ لجميع قيم x و y . (هذا استعمال خاص للصفة الخطية عما هو مألوف: الدالة f المعرفة بالصيغة $f(x) = ax + b$ ليست خطية حسب تعريفنا عندما $b = 0$ ومن الواضح أنه إذا كان $f(x) = \pm ax$ فإنها خطية ويتـوقع أن لجميع الدوال الخطية هذه الصيغة، لكن هذا ليس

صعبـا لإعـطاء مثال على ذلك لابد من الرجوع إلى إحدى الخواص المعقدة لنظام الأعداد الحقيقية التي تعتمد على مفاهيم لانتطرق لها في هذا الكتاب[٢٩]. أمر آخر ليس واضحاً أيضا ولكن سنثبته بعد قليل هو أن الدالة الخطية غير المستمرة لابد وأن تكـون غير مستمـرة بشكل كبير : مثلاً تكون غير محدودة في كل فترة وفي الواقع منحناها يجب أن يكون في R_2 . لذا من المتوقع أنه لايوجد بناء سهل لدالة من هذا النوع .

لنعتـبر دالــة خطية f . لكـل x نحصـل على $f(2x) = f(x + x) = 2f(x)$ ولـذا بالاسـتـقـراء الـرياضي فإن $f(nx) = nx$ لكـل عدد طبـيعـي n . بـمـا أن $f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$ فـإن $f(0) = 0$. كـذلـك $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ لذا $f(-x) = -f(x)$ أي أن $f(nx) = nx$ لجميع الأعـداد الصحيحـة المـوجبـة والسـالبـة. إذا استبـدلنـا x بـ x/n نحصـل على $f(x) = nf(x/n)$ أي أن $f(x/n) = n^{-1}f(x)$. الآن اسـتـبـدل x بـ mx ولـذا $f(mx/n) = n^{-1}f(mx) = \frac{m}{n} f(x)$. لذا $f(rx) = rf(x)$ لكـل عدد قياسي r . عنـدمـا $x = 1$ فإن $f(r) = rf(1)$ لكـل عدد قياسي r . هذا يؤدى إلى أنـه إذا كانـت f مستمرة فإن $f(x) = xf(1)$ لكل x .

نستطيع تقوية هذه النتيجة بسهولة عن طريق إثبات $f(x) = xf(1)$ لكل x إذا كانت f مستمرة فقط عند نقطة ما. إذا كان $a < c < b$ فإن $f(c + \delta) - f(c) \to 0$ عندما $\delta \to 0$ ، لكن $f(c + \delta) - f(c) = f(\delta)$ لذا $f(\delta) \to 0$ عندما $\delta \to 0$. أي أن f مستمرة عند 0 . الآن إذا كانت x أى عدد حقيقي فإن $f(x + \delta) - f(x) = f(\delta) \to 0$ عنـدمـا $\delta \to 0$ لذا f مستمـرة عند x . وبالتالي f مستمرة في R_1 وهذا يقتضي أن $f(x) = xf(x)$.

نستـطيع أيضا تخفيف بعض الفرضيات وإثبات أن الدالة الخطية مستمرة. لنفترض أن f محدودة فقط في فترة ما أو حتى في مجموعة E لها الخاصية التالية :
المجموعة المكونة من جميع المسافات $|x - y|$ بين النقاط x و y في E تحتوى على جوار للنقطة 0 . أي أنه يوجد عدد δ موجب بحيث إذا كانت $|t| < \delta$ فإنه توجد نقاط x و y في E بحيث $x - y = t$. إذن باستطاعتنا أيضا الاستنتاج[٣٠] أن f مستمرة إذا

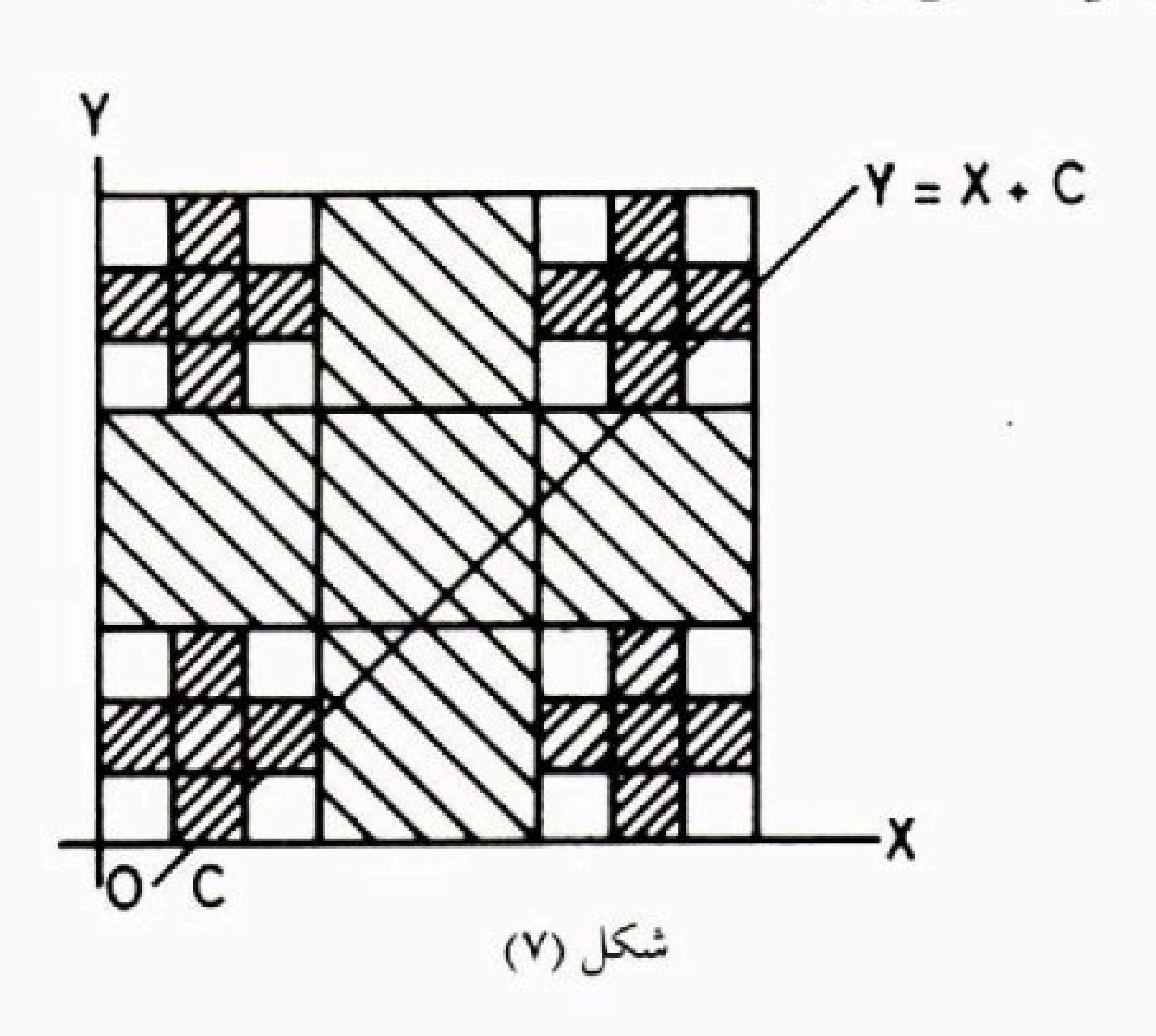
كانت خطية، ولذا الدالة الخطية f المحدودة في مجموعة من ذلك النوع المذكور أعلاه لابد وأن تكون على صيغة $f(x) = cx$.

لتكن $|f(x)| \leqslant M$ في E . للأعـداد t التي هي مسـافـات بين نقاط في E نحصل على $|f(t)| = |f(x - y)| = |f(x) - f(y)| \leqslant 2M$ ، لذا $|f(u)| = n^{-1}|f(nu)| \leqslant 2M/n$ إذا كان $|u| < \delta/n$. الآن لنـفـترض أن s أي عدد حقـيقـي و r عدد قياسي بحيث $|r - s| < \delta/n$. فإن :

$$|f(s) - sf(1)| = |f(s - r) + (r - s)f(1)| \leqslant \frac{2M}{n} + \delta|f(1)|/n$$

بما أنه لدينا مطلق الحرية في اختيار n أي عدد كبير نرغبه فإن $f(s) - sf(1) = 0$.

يوجد العديد من المجموعات E خلاف الفترات والتي لها الخاصية المستعملة في هذا الإثبـات من بينهـا مايسمى بالمجموعات الموجبة القياس (Positive measure) (وهنا لابد من الرجوع إلى تكامل لبيج) وكذلك بعض المجموعات قياسها صفراً، على سبيل المثـال مجموعة كانتور Cantor (بند ٦). إثبات هذه الحقيقة من الممكن إعـطاءه صيغـة هنـدسية بديهية[٣١] . خذ إحـداثيات R_2 المـألوفة وانشيء مجموعات كانتور في الفترات [0, 1] لكلا الإحداثيين x و y وذلك بالحذف من المستوى وليس فقط الإثلاث الوسطي من الفترات ولكن أيضا جميع النقاط من المربع $[0, 1] \times [0, 1]$ التي لها إحداثي واحد (على الأقل) في فترة محذوفة، لذا في كل خطوة تحذف بعض المناطق المظللة. كما في شكل (٧).



شكل (٧)

لنـأخذ الخط الذى معادلته $y = x + c$ حيث $0 \leqslant c \leqslant 1$ في كل خطوة، هذا الخط يقـطع على الأقـل واحـداً من المربعات التي لم تحذف في هذه الخطوة. هذه المربعات مغلقة ومتداخلة Nested لذا فتقاطعها يحتوى على نقطة (x, y) بحيث $y = x + c$ والنقطتان y, x تنتميان لمجموعة كانتور.

لاثبـات[٣٢] أن $f(x) = cx$ للدالـة الخطية f التي منحناها غير كثيف في R_2 نستطيع أن نرجع إلى حقيقة أولية في نظرية الأعداد. ليكن (x_1, x_2) و (y_1, y_2) زوجين من الأعـداد الحقيقية غير المتناسبه، هذا يعني أنه $x_1y_2 \neq x_2y_1$ أو هندسياً. إن النقطتين (x_1, x_2) و (y_1, y_2) من R_2 لاتقعان على نفس الخط المستقيم المار بنقطة الأصل. فإنه إذا كان a و b أي عددين حقـيقيين، نستـطيع أن نجـد عددين قياسيين r_1 و r_2 بحيث $r_1x_1 + r_2x_2$ و $r_1y_1 + r_2y_2$ يكونان قريبين بالدرجة التي نرغبها من a و b على التوالي. لإثبات ذلك نحل المعادلتين $ux_1 + x_2v = a$ و $uy_1 + vy_2 = b$ (لأن مميزهما لايساوى الصفر) ونختار r_1 و r_2 قريبين من u و v على الترتيب.

الآن لنفترض أن f خطية وليست على الصيغة $f(x) = ax$. الافتراض الثاني يؤدى إلى أنه من الممكن إيجاد نقطتين x_2 و x_1 بحيث $f(x_1)/x_1 \neq f(x_2)/x_2$. لذا لكل نقـطة (a, b) في R_2 نستـطيع إيجـاد عددين قياسـيين r_1 و r_2 بحـيث أن $f(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1f(x_1) + r_2f(x_2)$ يختلف قليلاً عن b وفي نفس الـوقت $r_1x_1 + r_2x_2$ يختلف قليلاً عن a . لذا توجد نقطة على منحنى f قريبة بالدرجة التي نرغبها من النقطة (a, b) في R_2 .

بالإمكان إعطاء إثبات آخر يبرز بعض المفاهيم الإضافية كالتالي: لنفترض أن f خطية ليست من الصيغة $f(x) = cx$. بما أن $f(r + t) = f(r) + f(t)$ و $f(r) = cr$ لكـل عدد قياسي r فإنه يكفي أن نثبت أن f تأخذ عند النقاط القريبة من نقطة الأصل قيمًا قريبة لكل عدد حقيقي، أو بشكل مكافىء، قيمًا قريبة لكل عدد قياسي. ليكن A عدداً قياسياً موجب و $\in (< 1)$ عدد صغـيراً موجبـاً نستخـدمـه لتعيين درجة القرب. بما أننا نعرف أن f غير محدودة في $(0, \in)$، لنفترض بالتحديد أن f تأخذ قيما موجبـة كبـيرة هناك. لذا يوجد عدد صحيح n أكبر من $A/\in$ بحيث أنه لعدد ما s في $(0, \in)$ نحصل على $n + 1 \geqslant f(s) \geqslant n$. بما أن $f(rx) = rf(x)$ لكل الأعداد القياسية r

ولكـل x فإن $f(As/n) = (A/n) . f(s)$ ولـذا $A + \epsilon > A(n+1)/n \geq f(As/n) \geq A$ حيث As/n نقطة في الفترة $(0, \epsilon)$. بالتالي نكون حصلنا على نقطة قريبة من 0 حيث f تأخذ قيمة قريبة من A إذا كانت $A > 0$. إذا كانت $A < 0$ فإنه توجد نقطه قريبة من الصفر بحيث f تأخذ قيمة قريبة من $-A$ وبما أن $f(-x) = -f(x)$ فهذا يؤدى إلى نفس الاستنتاج السابق.

نورد هنا تطبيقاً في حساب التفاضل والتكامل للنظريات المتعلقة بالدوال الخطيه[٣٣].

لنفترض أن النهاية $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{x-R}^{x+R} f(u)du$ **موجودة لكل عدد حقيقي** x ونرمز لها بـ $\Phi(x)$. سنبين أن $\Phi(x)$ لابد وأن تكون على الصيغة $ax + b$. أولاً

$$\int_{(x-h)-R}^{(x-h)+R} f(u)du + \int_{(x+h)-R}^{(x+h)+R} f(u)du = \int_{x-(R+h)}^{x+(R+h)} f(u)du + \int_{x-(R-h)}^{x+(R+h)} f(u)du$$

ولـذا $\Phi(x-h) + \Phi(x+h) = 2\Phi(x)$. إذا استبدلنا $x-h$ و $x+h$ بـ x و y نحصل على $\Phi(x) + \Phi(y) = 2\Phi(\tfrac{1}{2}(x+y))$. الآن ضع $\psi(x) = \Phi(x) - \Phi(0)$ لنحصل على

$$\psi(x) + \psi(y) = \Phi(x) + \Phi(y) - 2\Phi(0) \qquad (*)$$

$$= 2\Phi(\tfrac{1}{2}(x+y)) - 2\Phi(0) = 2\Phi(\tfrac{1}{2}(x+y))$$

هذا صحيح لكل y ولذا على وجهه الخصوص عندما $y = 0$ نجد أن $\psi(0) = 0$ و $\psi(x) = 2\psi(x/2)$. في المعادلة الأخيرة استبدل x بـ $x + y$ لنحصل على $\psi(x+y) = 2\psi(\tfrac{1}{2}(x+y))$. على كل حال (*) أعلاه تبين أن $2\psi(\tfrac{1}{2}(x+y)) = \psi(x) + \psi(y)$. لذلك فإن $\psi(x) + \psi(y) = \psi(x+y)$ أي أن ψ خطية الآن ψ نهاية لدوال مستمرة ولذا لابد وأن يكون لها نقاط استمرار (١٨). لكن نحن نعرف أن الدالة الخطية ψ التي لها نقطة استمرار تكون على الصيغة $\psi(x) = x\psi(1)$ أي أن $\Phi(x) = \Phi(0) + x\psi(1)$ وهو المطلوب إثباته.

تمرين (٢٠-١)[٣٣ أ]
افترض أن $\Phi(x)$ ترمز للكمية $\lim_{R\to\infty}\int_R^{x+R} f(u)du$ وأن $\Phi(x)$ موجودة لكل عدد حقيقي x . اثبت أن $\Phi(x) = ax$.

٢١ - التفاضلات[٣٣ ب]

سوف نقتصر في نقاشنا على الدوال التي مجالها في R_1 ومداها فترات في R_1 . بالإضافة إلى تفاضل دالة f والتي بالإمكان تعريفها كالعادة كما سوف نعتبر بعض التعميمات التي لها ميزة إمكانية تطبيقها على دوال ليست قابلة للتفاضل بالطريقة المألوفة . الآن تعرف تفاضلات ديني Dini باستخدام الرموز التالية :

$$f^+(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} ,$$

$$f_+(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} ,$$

$$f^-(x) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} ,$$

$$f_-(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} ,$$

حيث + و - ترمز لليمين واليسار على التوالي ومواضعهما (العلوية أو السفلية) ترمز للنهايات العظمى والصغرى على الترتيب . لكل دالة f ولكل x هذه التفاضلات الأربع موجودة سواء كانت محدودة أو غير محدودة .

من الشائع استعمال التعبير «تفاضل f» ليعني (حسب النص) أما العدد $f'(x)$ أي تفاضل f عند النقطة المعينة x أو الدالة f' التي قيمتها عند x العدد $f'(x)$. سوف نستعمل نفس التعبير الغامض أعلاه لتفاضلات ديني . إذا كنا سنتكلم عنها كدوال فسوف نعمم فكرة الدالة وذلك باعتبار الدوال التي قيمها ربما تضم $\infty +$ أو $\infty -$. عند هذه النقطة لابد وأن نكون حذرين عند التعامل مع هذه الدوال المعممة حيث توجد بعض الصعوبات في تحصيل المجموع أو الضرب أو في محاولة مفاضلتها .

سيجد القارىء أن التعامل بهذه التفاضلات لن يكتنفه أي شيء من هذا الغموض.

إذاً $f^+(x) = f_+(x)$ نقول إن التفاضل من اليمين موجود عند x ونرمز له بـ $f'_+(x)$. بطريقـة مشـابهة نعرف $f'_-(x)$. أخيراً التفاضل المعتاد $f'(x)$ يكون موجوداً (منتهياً أو غير منته) إذا وإذا فقط كانت جميع التفاضلات الأربعة متساوية.

حتـى ولـو كان $f^+(x)$ و $g^+(x)$ منـتـهـيين فليس بالضرورة أن يكـون $(f + g)^+(x) = f^+(x) + g^+(x)$ ولـكـن إذا كان $f'(x)$ موجـوداً فإن $(f +g)^+(x) = f'(x) + g'(x)$ (انظر البند ١٥).

تمرين (٢١-١)

اثبت أنـه إذا كان $f'_+(x)$ موجوداً ومنتهياً فإن f مستمرة من اليمين عند x وأنه كان $f'(x)$ موجوداً أو منتهياً فإن f مستمرة عند x.

تمرين (٢١-٢)

بين أن f ربـما تكـون غير مستمـرة عند x عندما تكون $f'(x)$ موجودة وغير منتهية (مساوية لـ ∞).

من جهة أخرى لقد رأينا سابقاً أن الدالة المستمرة ليس بالضرورة أن يكون لها تفاضل (منته أو غير منته) في أي مكان.

تمرين (٢١-٣)

اثـبـت أنــه إذا كان $f'(a)$ موجـوداً (مـنـتـهـياً) فبـاسـتـطاعـتـنـا كتـابـة $f(x) - f(a) = (x - a)[f'(a) + \epsilon (x)]$ حيث $\lim_{x \to a} \epsilon (x) = 0$.

قاعـدة السلسلة للتفـاضـل تنص على أنـه إذا كان $f'(a)$ موجـوداً (منتهياً) وإذا $g(b) = a$ وإذا كان $g'(b)$ موجـوداً (منتهياً) فإن الـدالـة Φ حيث $\Phi(x) = f(g(x))$ قابلة للتفاضل عند b أي أن تفاضلها $\Phi'(b)$ موجود ويساوى $f'(a)g'(b)$. إثبات خاطىء لذلك هو كالتالى: عندما $h \to 0$ فإن

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\to f'(g(b))\,g'(a)$$

تمرين (٢١-٤)

اوجد الخطأ في الإثبات السابق ومن ثم اعط إثباتاً صحيحاً باستخدام تمرين (٢١-٣).

هنـــاك تطبيق آخـر لتمـرين (٢١-٣) وهـو الحصـول على شـرط ضروري للتفاضل المحدود (هذا الشرط كافٍ أيضا).

إذا كان نطاق f يحتوى على فترة في R_1 و a نقطة داخلية لهذه الفترة فإنه لكل ϵ موجب يوجـد جوار N للنقطة a صغير لدرجة أنة إذا كانت t_1 و t_2 في N وفي اتجاهين متعاكسين من a وإذا كانت هذه هي الحالة أيضا بالنسبة للعددين u_1 و u_2 فإن:

$$\left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}-\frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2}\right|<\epsilon$$

لاحظ أنه يكفي أن نثبت أن كل كسر في الجهة اليسرى من الممكن جعله قريباً من $f'(u)$. الآن:

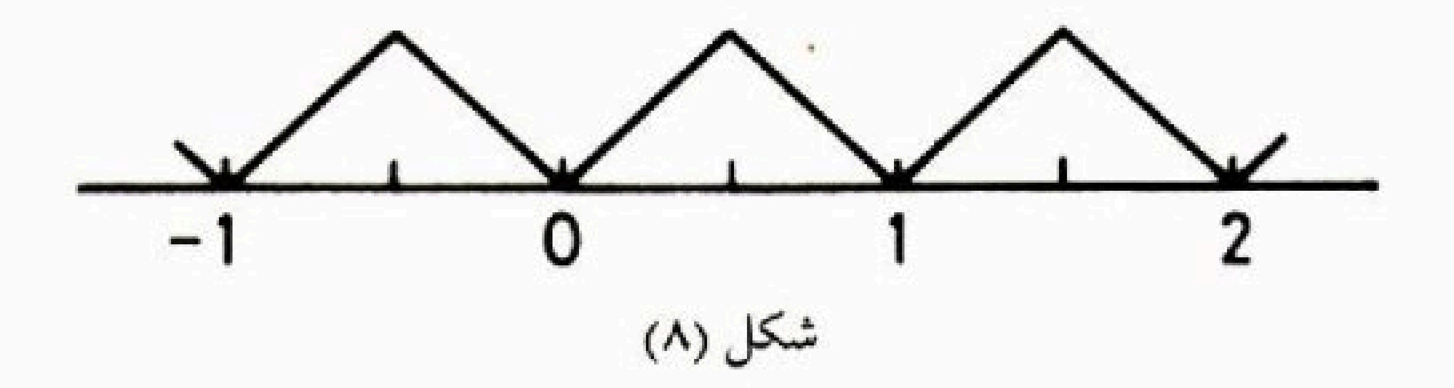
$$\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}=\frac{f(t_1)-f(a)}{t_1-a}\cdot\frac{t_1-a}{t_1-t_2}-\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-a}\,\frac{t_2-a}{t_1-t_2}$$

$$=(f'(a)+\varepsilon_1)\frac{t_1-a}{t_1-t_2}-(f'(a)+\varepsilon_2)\,\frac{t_2-a}{t_1-t_2}$$

$$=f'(a)+\varepsilon_1\,\frac{t_1-a}{t_1-t_2}-\varepsilon_2\,\frac{t_1-a}{t_1-t_2}$$

حيث $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ عنــدمــا $t_1, t_2 \to a$. بما أن $|(t_1-a)/(t_1-t_2)| \leqslant 1$ و $|(t_2-a)/(t_1-t_2)| \leqslant 1$ فإننا نحصل على ضالتنا.

هذه النتيجة الأخيرة بالإمكان استخدامها للتأكد من عدم قابلية التفاضل لبعض الدوال المستمرة(٣٤). المثال التالي يوضح ذلك: إذا كانت $G(x)$ تمثل المسافة من العدد الحقيقي x إلى أقرب عدد صحيح، فمنحنى G يشبه الشكل (٨)



شكل (٨)

لتكن $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}G_n(x)$ حيث $G_n(x) = G(2^n x)$. استمرارية H نابعة من استمرارية G ومن تقارب السلسلة بانتظام. لنفرض أن a أي نقطة و $(a - \delta, a + \delta)$ فترة تحوى a . بما أن النقاط $2^{-k}r$ تكون مجموعة كثيفة حيث k عدد صحيح موجب و r عدد صحيح فإننا نستطيع إيجاد نقطتين $x_1 = 2^{-k}r$ و $x_2 = 2^{-k}(r + 1)$ في $(a - \delta, a + \delta)$ في ناحيتين متعاكستين من a . لتكن النقطة ξ الوسطى للفترة (x_1, x_2) . المنحنى G له أركان Corners عند النقاط $2^{-1}p$ حيث p عدد صحيح والمنحنى G_1 له أركان عند النقاط $2^{-2}p$ ، بشكل عام منحنى G_n له أركان عند النقاط 2^{-n-1} . لذلك فالمنحنيات $G_0, G_1, \ldots, G_{k-1}$ ليس لها أركان بين x_1 و x_2 ولذا فميل كل G_j $(0 \leq j \leq k - 1)$ بين x_1 و ξ مساو لمثيلة بين x_1 و x_2 . من جهة أخرى لكل $n > k$ نحصل على $G_n(x_1) = G_n(x_2) = 0$. لذلك

$$\frac{H(\xi) - H(x_1)}{\xi - x_1} - \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1}$$

بعد الاختصار تصبح

$$\frac{G_k(\xi) - G_k(x_1)}{\xi - x_1} - \frac{G_k(x_2) - G_k(x_1)}{x_2 - x_1} = \pm 1$$

مناقشة مشابهة تنطبق على

$$\frac{H(x_2) - H(\xi)}{x_2 - \xi} - \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1}$$

بما أنه إما ξ و x_1 أو ξ و x_2 في ناحيتين متعاكستين من a فالشرط الضروري للتفاضل المحدود لايمكن أن يتحقق.

هذا يبين أن H ليس لها تفاضل منته عند أي نقطة. (بناؤنا السابق لدالة غير قابلة للتفاضل في أي مكان، واضح أن الدالة المستمرة ليس لها بالضرورة تفاضل غير محدود عند أي نقطة).

تمرين (٢١-٥)

اثبت أنه إذا كان $f'(x) > 0$ فإن f تزايدية عند x، بمعنى أنه توجد فترة $(x - h, x + h)$ بحيث إذا كانت s و t في هذه الفترة و $s < x < t$ فإن $f(s) < f(x) < f(t)$. بشكل عام، إذا كان $f_+(x) > 0$ فإن f تزايدية من اليمين عند x.

نقول إن f لها **قيمة عظمى** عند x إذا وجد جوار N للنقطة x بحيث $f(y) \leqslant f(x)$ لجميع قيم y في N، القيمة العظمى تكون فعلية إذا وجد جوار N' لـ x بحيث $f(y) < f(x)$ لكل y في N' و $y \neq x$.

تمرين (٢١-٦)

اثبت أنه إذا كان للدالة f قيمة عظمى عند x فإن $f^+(x) \leqslant 0$ و $f_-(x) \geqslant 0$.

على وجه الخصوص إذا كان لـ f قيمة عظمى عند x وإذا كان $f'(x)$ موجوداً فإن $f'(x) = 0$. ملاحظات مشابهة تنطبق بطبيعة الحال على القيمة الصغرى.

يوجد عدد قابل للعد من القيم العظمى لأي دالة [٣٥]. للتأكد من ذلك لنعين للقيمة العظمى لـ f عند نقطة ما x الفترة (r_1, r_2) التي طرفيها عددين قياسيين بحيث r_1 و r_2 في ناحيتين متعاكستين من x وبحيث $f(y) < f(x)$ لكل $y \neq x$ و $r_1 < y < r_2$.
هذه الفترة لايمكن تعينها لقيمة عظمى فعلية أخرى عند نقطة أخرى z لأنها (أي الفترة) في هذه الحالة سوف تحتوى على كل من x و z كما أنه لابد وأن يكون $f(z) < f(x)$ وكذلك $f(x) < f(z)$. فبالتالي القيم العظمى الفعلية المختلفة لها فترات قياسية معينة مختلفة. بما أنه يوجد فقط عدد قابل للعد من الفترات التي أطرافها أعداد

قياسية لذا يوجد على الأكثر عدد قابل للعد من القيم العظمى الفعلية.

على كل حال من الممكن أن يوجد عدد غير قابل للعد من القيم العظمى غير الفعليه لدالة مستمرة. مثلاً الدالة الثابتة لها قيم عظمى غير فعلية عند جميع النقاط. من الممكن أيضاً إثبات أن قيم أي دالة عند النقاط التي يكون فيها تفاضلها صفراً (أوحتى عندما يكون واحداً من تفاضلات ديني صفراً) تكون مجموعة قياسها صفر[٣٦]. هذه الخاصية مع الخواص العامة للتفاضل والتي سيرد زكرها في (بند ٢١) تبين أن الإحداثي الصادي لكل القيم العظمى تكون مجموعة قياسها صفر.

من المدهش أن خاصية كون دالة هي تفاضل لدالة أخرى يضع على الأولى شروطاً ليست بالسهلة.

فلاحظ أولاً أن تفاضل دالة مستمرة قد لايكون مستمراً، حتى ولو كان موجوداً عند كل نقطة. لتوضيح ذلك نأخذ الدالة f المعرفة كالتالي $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ لكل $x \neq 0$ و $f(0) = 0$.

لكل $x \neq 0$ فإن $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. الآن $\lim\limits_{x \to 0} f'$ غير موجود ومن السهولة أن نشرع ونستنتج أن $f'(0)$ غير موجود أيضا (راجع بند ٢١). على كل حال $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. لذا فإن $f'(0)$ موجود. في الحقيقة أن عدم وجود $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ بالتأكيد يبين أن f' غير مستمرة عند 0 (على الرغم من كونها مستمرة في كل مكان آخر).

هذا المثال يوضح لنا مدى أهمية الجملة التالية: **إن أي تفاضل (موجود ومحدود في فترة) له خاصية القيمة المتوسطة**: أى أنه إذا كان له قيمتان فله جميع القيم بينهما.

تمرين (٢١-٧)

اثبت أنه من الممكن استنتاج ذلك من الحقيقة: إذا كان $f'(a) < 0$ و $f'(b) > 0$ فإنه توجد نقطة c بين a و b بحيث $f'(c) = 0$.

بقي علينا أن نثبت الحقيقة السابقة. بما أنه لدينا دالة f تناقصية عند a لأن $f'(a) < 0$ وتزايدية عند b لذا فقيمتها الصغرى في $[a, b]$ لاتحدث عند a أو b. بالتالي فهي تقع عند نقطة داخلية c ونحصل على $f'(c) = 0$.

تمرين (٢١-٨)

لتكن f دالة دورية قابلة للتفاضل و a عدداً موجباً معطى ، فإنه توجد نقطة x المماس عندها يقابل المنحنى مرة أخرى عند نقطة على بعد a الوحدات من x على الإحداثي السيني (أي أن : $f(x + a) - f(x) = af'(x)$) . النص المألوف لنظرية القيمة المتوسطة هو أنه إذا كانت f مستمرة في $[a, b]$ وكان f' موجود في (a, b) فإنه توجد نقطة c في (a, b) بحيث $(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(c)$. هذه الجملة ممكن قراءتها على أن الكسر $(f(b) - f(a)/(b - a)$ يقع بين أكبر حد أدنى g.l.b. وأصغر حد أعلى l.u.b. للدالة $f'(x)$ (وهذا ما يحتاج عادة إليه عملياً) أو قراءتها على أنها جملة عن القيم المحتملة لـ f' ، وذلك أن التفاضل في مكان ما يأخذ قيمة مساوية لذلك الكسر . في الحقيقة سنثبت فيما بعد حقيقتين أقوى بهذا المدلول .

نبدأ على كل حال بإعطاء الإثبات المعتاد لنظرية القيمة المتوسطة ومن ثم نورد بعض التطبيقات عليها . لنأخذ الدالة g المعرفة بالصيغة

$$g(x) = f(x) - f(a) - (f(b) - f(a)) \cdot \frac{x - a}{b - a}$$

لذا فإن $g(a) = g(b) = 0$. بالتالي فإن لـ g قيمة عظمى أو صغرى بين a و b عند نقطة c و $g'(c) = 0$ ، لكن في هذه الحالة $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

الطريقة الأخرى غير المألوفه لإثبات ذلك هو أن نبدأ بالمساواة $g(a) = g(b) = 0$ و نستخدم نظرية الوتر الشاملة (بند ١٤) لنستنتج أنه توجد فترات (x_n, y_n) في (a, b) كل واحدة طولها نصف طول سابقتها بحيث $g(x_n) = g(y_n)$. هذه الفترات متداخلة وبالتالي تتقارب لنقطة c في الفترة المفتوحة (a, b) ، (إذا اخترنا أول فترتين بحيث يجتنبان a و b) . بما أنه لدينا متتالية من الأوتار الأفقية للدالة g أطرفها تقترب من c فإن المماس عند c (على افتراض وجوده) لابد وأن يكون أفقياً ، أي أن $g'(c) = 0$.

لقد افترضنا في نظرية القيمة المتوسطة أن f مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$. في الحقيقة نستطيع أن نحذف هذا الشرط عند طرفي الفترة إذا استوجبنا استمرارية f من اليمين عند a ومن اليسار عند b (في حالة وجود النهايتين

$f(a+)$ و $f(b-)$)، وفي حالة تعذر وجودهما لانتطلب شيئاً على الاطلاق عند طرفي الفـترة. على كل حال هذا التعميم مصـطنـع لأنـه إذا كان $f(a+)$ غير موجـود و f' محدودة بالقرب من a فإن f' تأخذ كل قيمة محدودة في كل جوار أيمن للنقطة a ولذا $(b - a)f'(c)$ تأخذ كل قيمة محدودة نرغبها[٣٧]. ذلك يعزى لأنه إذا كان k أي عدد فإن $f(x) - kx$ ليس لها نهاية من اليمين عند a وبالتالي لايمكن أن تكون مطردة على جوار أيمن لـ a. لذلك فللدالة قيم عظمى وصغرى في كل جوار أيمن لـ a ويكون بذلك تفاضلها صفراً عند تلك النقاط، أي أن $f'(x) = k$.

الاتجاه العكسي لنظرية القيمة المتوسطة خطأ بشكل عام. على سبيل المثال، إذا كانت $f(x) = x^3$ فإن $f'(0) = 0$، ولكن $f(b) - f(a)$ لايساوى صفرا على الإطلاق إذا كانت $b \neq a$.

كتطبيق لهذه النظرية نثبت الآن نظرية تتعلق بمفاضلة متتالية من الدوال حداً حداً. النظرية التي ورد ذكرها في بند ١٦ تتطلب قابلية التكامل للمشتقات وإثباتها يستخدم نظرية عن تكامل متتالية من الدوال متقاربة بانتظام، لكن بالإمكان إثبات حقيقة أعم من ذلك بدون استخدام التكامل على الإطلاق، نصها كالتالي:

لنفـترض أن للـدوال f_n تفـاضلات f'_n محدودة في فترة I وأن المتتالية $\{f_n(a)\}$ تتقارب عند نقطة ما a في I، وأن $\{f'_n\}$ تتقارب بانتظام إلى g (مثلاً)، فإن f_n تتقارب بانتظام في I إلى نهاية f إذا كانت الفترة I متراصة وإلاَّ بانتظام في كل مجموعة جزئية متراصة من I، وكذلك فإن $f'(x) = g(x)$ لكل x في I.

لإثبات ذلك نطبق أولاً نظرية القيمة المتوسطة على الدالة $f_n - f_m$:

$$f_n(x) - f_m(x) - [f_n(a) - f_m(a)] = (x - a)[f'_n(c) - f'_m(c)]$$

حيث c تقـع بين x و a (وبالطبع ربما تعتمد على m و n). أيضاً تقارب $\{f'_n\}$ بانتظام وتقـارب $\{f_n(a)\}$ يجعـل $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام طالما $|x - a|$ محدودة. لنفترض أن f نهاية f_n وأن ϵ عدد موجب لنحصل على

$$|f_n(x) - f_m(x) - [f_n(a) - f_m(a)]| \leqslant (x - a)\,\epsilon$$

إذا كانت n و m أكبر من عدد صحيح n_0. دع $m \to \infty$ لنحصل على

$$|f_n(x) - f(x) - [f_n(a) - f(a)]| \leqslant (x - a) \in \quad \text{إذا} \quad n > n_0$$

أي أن

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leqslant \in \quad \text{إذاً} \quad n > n_0$$

كذلك من فرضية التقارب المنتظم نحصل على $|f_n'(a) - g(a)| \leqslant \in$ إذا $n > n_1$. الآن ثبت n أكبر من n_0 و n_1 . إذا كان $|x - a|$ صغيراً بقدر كاف فإن: $\left| \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - f_n'(a) \right| < \in$ ولذا $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f_n'(a) \right| < 2\in$ إذا كان $|x - a|$ صغيراً بقدر كاف، لكن $|f_n'(a) - g(a)|$ لذا $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a) \right| < 3 \in$ هذه المتراجحة تبين أن $f'(a)$ موجود ويساوى $g(a)$. بما أن $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام فبإمكاننا أخذ a أي نقطة على الإطلاق في I وهذا ينهي إثبات هذه النظرية.

تطبيق آخر لنظرية القيمة المتوسطة ينتج عنه نظرية[٣٨] ذات تفسير هندسي واضح. لنفترض أن f قابلة للتفاضل في $[a, b]$ وأن $f'(a) = f'(b)$ فإنه توجد نقطة c في (a, b) بحيث $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$. وهذا يعني أنه إذا كان منحنى f له نفس الميل عند a و b فلا بد وأن توجد نقطة c بحيث أن المماس عندها يمر بنقطة البداية $(a, f(a))$. من السهولة تصور ذلك هندسياً.

لإثبات ذلك لنفترض أن $f'(a) = f'(b) = 0$ لأنه إذا لم تكن هذه هي الحالة فسنعتبر الدالة المعرفة بالصيغة $f(x) - xf'(a)$. الدالة

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \ a < x \leqslant b, \ g(a) = 0$$

مستمرة في $[a, b]$ (التأكد من هذا عند النقطة a يتطلب بعض العناية) وقابلة للتفاضل في $(a, b]$. الآن $g'(b) = -g(b)/(b - a)$ إذا كان $g(b) > 0$ فإن $g'(b) < 0$ ولذا g تناقصية عند b (تمرين ٢١-٥) بينما $g(a) = 0$ لذا g تدرك قيمتها العظمى عند النقطة c بين a و b حيث $g'(c) = 0$ مناقشة مشابهة تنطبق في حالة كون $g(b) < 0$.

أما إذا كان $g(b) = 0$ فإن $g(a) = g(b) = 0$ ونحصل مرة أخرى على $g'(c) = 0$ لنقطة بينية c . بما أن

$$g'(c) = \frac{f'(c)}{c - a} - \frac{f(c) - f(a)}{(c - a)^2}$$

فإنه يتحقق المطلوب.

يوجد تطبيق آخر لهذه النظرية يخدم تبرير فكرة بديهية وهي أن التفاضلات أعقد في معظم الأحيان من الدوال التي اشتقت منها(٣٩).

تمرين (٢١-٩)

إذا كانت $f(x) \geqslant 0$ و $f(0+) = 0$ وكانت f قابلة للتفاضل في $(0, 1]$ و $h(x) \geqslant 0$ و $\int h(x)dx$ متباعد عند 0 فإن $h(f(x))f'(x)$ غير محدود عندما $x \to 0$ ، مثلاً $f'(x)/f(x)$ غير محدود ولذا $f'(x)/\{f(x) \log f(x)\}$ غير محدود أيضا (على افتراض أن $f(x) \not\equiv 0$).

من الممكن أن نأمل في تعميم نظرية القيمة المتوسطة لحالات لايكون فيها التفاضل بالضرورة موجوداً لكن من الواضح أن التعميم المباشر غير صحيح. على سبيل المثال إذا $f(x) = |x|$ فإن $f'_+(x) = -1$ لكل $x < 0$ و $f'_+(x) = 1$ لكل $x \geqslant 0$ لذا على الرغم من كون $f(1) = f(-1)$ إلاّ أن $f'_+(x) \neq 0$ لجميع قيم x على الإطلاق. كذلك لانتوقع أن تتحقق هذه النظرية لأي من تفاضلات ديني. على كل حال يوجد بديل لها يتحقق لتلك التفاضلات ومن الممكن استخدامه في بعض التطبيقات(٣٩ أ).

هذا البديل ينص على أنه إذا كانت f مستمرة في $[a, b]$ وإذا كان c أي عدد أكبر من $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ فإننا نحصل عند عدد غير قابل للعد من النقاط x في (a, b) على $f^+(x) \leqslant c$. بطريقة مشابهة يوجد عدد غير قابل للعد من النقاط بحيث $f^-(x) \geqslant c$ إذا كان $c < [f(b) - f(a)]/(b - a)$. بشكل عام النقاط ليست نفسها في كلا الحالتين.

إثبات ذلك مشابه إلى حد كبير مثيله لنظرية القيمة المتوسطة. لنفترض أن

$k > f(b) - f(a)$ ونأخذ الدالة $g(x) = f(x) - f(a) - k\dfrac{x-a}{b-a}$ لذا فإن $g(a) = 0$ و $g(b) = f(b) - f(a) - k < 0$. ليكن s أي عدد بحيث $0 = g(a) > s > g(b)$ واعتبر المجموعة من النقاط x في $[a, b]$ بحيث $g(x) \geqslant s$ والتي عبارة عن صورة عكسية لمجموعة مغلقة، وبما أن g مستمرة فإنها مغلقة. هذه المجموعة محدودة لذا فلها حد أعلى x_s بحيث $g(x_s) = s$ (لأن g مستمرة). بما أن $g(b) < s$ فإن $x_s < b$. بما أن $g(x_s + h) < s$ لكل h موجبة وصغيرة بقدر كاف (وذلك من تعريف x_s) نحصل على $g^+(x_s) \leqslant 0$ ، وبالتالي $f^+(x_s) = g^+(x_s) + \dfrac{k}{b-a} \leqslant \dfrac{k}{b-a} = c$. بما أن قيم مختلفة من النقاط s تولد قيما مختلفة من x_s وبما أنه يوجد عدد غير قابل للعد من هذه النقاط بين 0 و $g(b)$ فإنه يوجد عدد غير قابل للعد من النقاط x بحيث $f^+(x) \leqslant c$.

من الحقائق المألوفة أنه إذا كانت f' موجودة وغير سالبة في فترة ما فإن f غير تناقصية في تلك الفترة. هذا واضح من نظرية القيمة المتوسطة لأن $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$ حيث $x < c < y$. إذا $f'(c) \geqslant 0$ نستنتج أن $f(y) \geqslant f(x)$ عندما تكون $y \geqslant x$.

نستطيع أن نستخدم النظرية التي أثبتناها آنفا لنحصل على نتيجة أقوى في اتجاهين: أولاً لاحاجة لافتراض أن f' موجودة وثانياً نستطيع أن نحذف عدداً قابلاً للعد من النقاط. بدقه أكثر، إذا كانت f مستمرة وكان أحد تفاضلات ديني غير سالب فيما عدا ربما عند عدد قابل للعد من النقاط فإن f غير تناقصية.

لنفترض أن $f^+(x) \geqslant 0$ لكل $a \leqslant x \leqslant b$ فيما عدا عند عدد قابل للعد من النقاط. (الفرضية $f_+(x) \geqslant 0$ تؤدى إلى ذلك، والإثبات بالنسبة لـ $f^-(x)$ مشابهة). إذا لم تكن f غير تناقصية لابد وأن توجد نقطتان x و y بحيث $y > x$ و $f(y) < f(x)$. تعميمنا لنظرية القيمة المتوسطة حيث $f(y) - f(x) < c < 0$ يؤدى إلى وجود مجموعة غير قابلة للعد من النقاط (x, y) بحيث $f^+ < 0$ وهذا يناقض افتراضنا.

تمرين (٢١-١٠)

بين أن استمرارية f فرض أساسي في النظرية السابقة: انشيء دالة غير مستمرة غير تزايدية بحيث $f_+(x) \geqslant 0$ لجميع قيم x.

نستطيع الآن أن نثبت أنه إذا كانت f مستمرة فإن لجميع تفاضلات ديني الأربعة نفس الحدود العظمى والصغرى في أي فترة، في الواقع بشكل أعم فإن لمجموعة الكسور $[f(x-h)-f(x)]/h$ نفس هذه الحدود التي لتفاضلات ديني إذا كانت بالطبع كل من x و $x+h$ في الفترة المعطاة. لنفترض أن $f^+(x) \geqslant m$ وأجعل $g(x) = f(x) - mx$. بما أن $g^+(x) \geqslant 0$ فإن الدالة g غير تناقصية. إذا كانت $h > 0$ نحصل على $g(x+h) - g(x) \geqslant 0$ أي أن $f(x+h) - f(x) - (x+h)m + mx \geqslant 0$ وبالتالي $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant m$ ولذا فإن $f_+(x) \geqslant m$. بطريقة مشابهة نحصل على $f(x) - f(x-h) - mx + (x-h)m \geqslant 0$ أي أن $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \geqslant m$ ولذا $f^+(x) \geqslant f_-(x) \geqslant m$.

بعد ذلك لنفترض أن أحد التفاضلات وليكن f^+ مستمراً عند x. هذا يعني أنه بالإمكان جعل حدوده العظمى والصغرى قريبة بالشكل الذى نرغبه من $f^+(x)$ في جوار صغير للنقطة x بقدر كاف، حسب النظرية السابقة فإن هذا ينطبق أيضاً على الحدود العظمى والصغرى للثلاث تفاضلات الأخرى وهذا يعني أنها جميعا تساوى $f^+(x)$ عند النقطة x. لهذا فإنه إذا كان أحد التفاضلات لدالةٍ مستمرةٍ مستمراً عند نقطة ما فإنه يوجد تفاضل عند تلك النقطة.

هناك خطأ شائع بين الطلاب الذين يدرسون حساب التفاضل والتكامل وهو افتراضهم أن $f'(y)$ غير موجود في حالة عدم وجود النهاية $\lim_{x\to y} f'(x)$ (راجع بند ٢١).

تمرين (٢١-١١)

اثبت وجود $f'(y)$ إذا كان $\lim_{x\to y} f'(x)$ موجودا.

أحد الأسباب التي تؤدى إلى هذا الالتباس ربما أنه إذا كان التفاضل غير مستمر فهو كذلك بشكل كبير، لهذا السبب فهذا النوع من الدوال غير شائع في

حساب التفاضل والتكامل. بشكل أدق، لايمكن أن يكون للمشتقة قفزة بسيطة، أي أنه إذا كان $f'(x)$ موجوداً عند كل نقطة x من فترة ما، وكانت النهايتان $f'(y+)$ و $f'(y-)$ موجودتين عند نقطة y في هذه الفترة فإنهما مساويتان لـ $f'(y)$. من جهة أخرى، المثال $f(x) = |x|$ يبين أن النهايتين لـ f' من كلا الجانبين موجودتان وتختلفان عند النقطة y إذا كان $f'(y)$ غير موجود.

إن استحالة احتمال وجود قفزة بسيطة لمشتقة ما هي نتيجة مباشرة لكون المشتقة تحقق خاصية القيمة المتوسطة.

كذلك نلاحظ أنه لايمكن أن يكون لدالة مستمرة تفاضل لانهائي في كل مكان. في الواقع أنه بالنسبة للدالة المستمرة لابد أن يكون $f^+(x) < +\infty$ عند مجموعة غير قابلة للعد[٤٠]. هذا واضح من التعميم لنظرية القيمة المتوسطة في (بند ٢١). في الواقع هذا التعميم ينص على أن $f^+(x) < c$ لمجموعة غير قابلة للعد إذا كان $c > [f(b) - f(a)]/(b - a)$.

نستطيع أن نستنتج من نظرية عامة سيرد ذكرها لاحقاً أنه لكل دالة f (ليست بالضرورة مستمرة) تفاضل f'_+ لانهائي من اليمين عند مجموعة قياسها صفر على الأكثر. من ناحية أخرى إذا لم تكن f مستمرة فإنه بالإمكان أن يكون $f^+(x) = +\infty$ عند كل نقطة x. من الممكن إنشاء مثال لهذه الظاهرة كالتالي[٤١]. لنمثل العدد الحقيقي x في $[0, 1]$ في النظام الثلاثي على النحو التالي $x = 0.a_1a_2 \ldots$ حيث كل a_n إما 0 و 1 أو 2. إذا كان للعدد x تمثيلان فنختار المنتهي منهما. الآن ضع $f(x) = 0 . b_1b_2 \ldots$ حسب النظام الثنائي حيث $b_n = 1$ إذا $a_2 = 2$ أو $b_n = 0$ في الحالات الأخرى. الآن بما أننا نحينا جانباً التمثيل الثلاثي المنتهي بتكرار 2 فإنه (أى التمثيل الثلاثي) لكل x يحتوى على متتالية لانهائية من العددين 0 أو 1. ليكن واحداً منهما في الخانة التي ترتيبها r. ولتكن x' مختلفه عن x فقط يكون 2 في الخانه r، فإن $x' > x$، في الحقيقة $x' - x = 3^{-r}$ أو $x' - x = 2.3^{-r}$. في كلتي الحالتين $f(x') - f(x) = 2^{-r}$. لذا $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geqslant \frac{3^r}{2^r}$ وبما أنه من الممكن أن تكون r كبيرة بالقدر الذى نرغبه فإن $f^+(x) = +\infty$.

أيضا من الممكن إثبات أن هذه الدالة مستمرة عدا عند النقاط التي لها تمثيل

ثلاثي منته وفي الحقيقة تكون مستمرة من اليمين عند هذه النقاط لكن غير مستمرة من اليسار.

من الشيق أن نعلم إنه إذا كانت دالة غير مستمرة عند نقاط من مجموعة أخرى كثيفة فإنه لابد وأن تكون مستمرة وغير قابلة للتفاضل عند نقاط من مجموعة من الفئة الثانية[٤٢]. لقد أثبتنا (بند ١٨) أنه إذا كانت f مستمرة عند نقاط من مجموعة كثيفة فإن نقاط عدم الاستمرار تكون مجموعة من فئة بير الأولى. لذا فوجود مجموعة كثيفة من نقاط الاستمرار يعني وجود عدد قليل نسبياً من نقاط عدم الاستمرار. الآن نبين أن وجود مجموعة كثيفة من نقاط عدم الاستمرار يسمح بوجود عدد قليل نسبياً من النقاط حيث يوجد التفاضل.

لتكن E_n مجموعة النقاط x بحيث أن $|y-x|<\frac{1}{n}$ يؤدي إلى $|f(y)-f(x)|/|y-x|<n$. في هذا المجال إذا ذكرنا «تفاضل» فهذا يعني تفاضل محدود (له قيمة منتهية)، لذا كل نقطة x حيث $f'(x)$ موجود تنتمي إلى إحدى المجموعات E_n. لإثبات أن مجموعة تلك النقاط من الفئة الأولى يكفي أن نثبت أن كل E_n مخلخلة. لنفترض العكس أي أن E_N كثيفة في فترة مفتوحة I. هذه الفترة تحوى نقطة w حيث f غير مستمرة لذا لابد وأن يوجد عدد موجب h ومتتالية $\{y_k\}$ بحيث $y_k \to w$ و $|f(y_k)-f(w)| \geqslant h$. ليكن k عدد يحقق $|y_k-w|<1/N$. بما أن E_n كثيفة في I نستطيع أن نختار x_k في E_N بحيث تقع بين y_k و w لذا $|x_k-w|<1/N$ و $|y_k-x_k|<1/N$. الآن

$$h \leqslant |f(y_k)-f(w)| \leqslant |f(y_k)-f(x_k)| + |f(x_k)-f(w)|$$

$$\frac{h}{|y_k-w|} < \left|\frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-w}\right| + \left|\frac{f(x_k)-f(w)}{y_k-w}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}\right| + \left|\frac{f(x_k)-f(w)}{w-x_k}\right| < 2N$$

لأن $x_k \in E_N$. دع $y_k \to w$ لنحصل على تعارض.

الآن نلاحظ أنه إذا كان واحد من تفاضلات ديني لدالة مستمرة مساوياً للصفر في فترة ما فإن الدالة ثابتة هناك لأنه قد أثبتنا أنها تكون غير تزايدية وغير تناقصية

معاً. وهذا يؤدي إلى أنه إذا كان لأى دالتين مستمرتين نفس التفاضل المحدود في فترة ما فهما يختلفان هناك بثابت فقط. من جهة أخرى من الممكن أن توجد دالتان مستمرتان لهما نفس التفاضل الذى لابد أن يكون لانهائياً عند بعض النقاط في فترة ما ولايختلفان بثابت هناك (راجع بند ٢٢).

هناك الكثير من الحقائق المتعلقة بمشتقات دالة اختيارية سوف نذكر نص بعض منها بدون إثبات[٤٣]. أولا فيما عدا عند نقاط من مجموعة قابلة للعد، التفاضل العلوي من ناحية لايقل عن التفاضل السفلي من الناحية الأخرى. أيضا، إذا كان $f^+ = +\infty$ في مجموعة E فإن $f_- = -\infty$ في E فيما عدا مجموعة قياسها صفر، وبطريقة مشابهة إذا كان $f_+ = -\infty$ فإن $f^- = +\infty$ فيما عدا مجموعة قياسها صفر. أخيراً قياس المجموعة حيث f^+ و f_- محدودان ومختلفان يساوى صفر. إذا ربطنا هذه الحقائق مع بعضها نرى أنه، فيما عدا عند مجموعة قياسها صفر، توجد ثلاثة احتمالات فقط:

(١) يوجد تفاضل محدود.

(٢) التفاضلان العلويان يساويان $+\infty$ والتفاضلان السفليان يساويان $-\infty$.

(٣) التفاضل العلوي من ناحية يساوى $+\infty$ والتفاضل السفلي من الناحيه الأخرى يساوى $-\infty$.

والتفاضلان الآخران محدودان ومتساويان. بما أن الاحتمال الأول فقط ينطبق على الدالة المطردة فبالتالي نرى أن لها تفاضل محدود تقريباً في كل مكان. سوف نعطي إثبات مباشر لهذا في البند القادم. أيضا من الممكن أن نستخلص من النظرية العامة أنه إذا كانت جميع التفاضلات محدودة تقريباً في كل مكان فإن للدالة تفاضل في كل مكان تقريباً.

٢٢ - الدوال المطردة (Monotonic Functions)

تسمى الدالة f من فترة I في R_1 إلى R_1 مطردة إذا كانت إما غير تناقصية أو غير تزايدية، أي أن f مطردة إذا كان إما $f(y) \geq f(x)$ أو $f(y) \leq f(x)$ عندما $y > x$ (x و y في I). إذا كان واحد من هذين الشرطين متحققاً بدون مساواة فإننا نقول إن f مطردة

فعلية Strictly monotonic . الدوال المألوفة المستخدمة في حساب التفاضل والتكامل إذا لم تكن مطردة فإنها على الأقل مطردة على كل قطعة Piecewise monotonic . بالتالي إذا كانت $f(x) = x^2$ فإنها تناقصية عندما $x < 0$ وتزايدية عندما $x > 0$ ، إذا كانت $f(x) = \sin x$ فإن f تزايدية وتناقصية بالتناوب في الفترات $(-\Pi, \Pi)$ ، $(\Pi, 3\Pi)$ وهكذا، وإذا كانت $f(x) = e^x$ فإن f تزايدية في كل R_1 . جميع هذه الدوال مستمرة . من جهة أخرى الدالة f المعرفة بـ $f(x) = [x]$ (أكبر عدد صحيح أقل أو يساوى x) غير تناقصية وغير مستمرة عند كل عدد صيحيح x .

تمرين (٢٢-١)

بين أن الدالة المطردة محدودة في كل فترة جزئية متراصة من نطاقها .

تمرين (٢٢-٢)

بين أن الدالة المطردة تقترب لنهاية محدودة من كل جهة عند كل نقطة داخلية من نطاقها .

تمرين (٢٢-٣)

اثبت أن نهاية متتالية متقاربة نقطياً من الدوال المطردة تكون دالة مطردة .

يقال إن للدالة f قفزة Jump عند نقطة x من نطاقها إذا كان لها نهايتان من جانبي x لكنها غير مستمرة عند x . من تمرين (٢٢-٢) نستطيع أن نقول إن نقاط عدم الاستمرار لدالة مطردة هي عبارة عن قفزات فقط . أبسط الدوال المطردة التي بالإمكان تخيلها هي تلك التي لها عدد محدود من القفزات، لكن بالإمكان أن يكون لها تركيب أعقد من ذلك . مثلاً، إذا كانت $f(x) = 2^{-n}$ في الفتره $[1/(n + 1), 1/n]$ فإن f غير تناقصية ذات قفزات لها نقطة نهاية عند الصفر .

يوجد عدد لانهائي قابل للعد على الأكثر من القفزات للدالة المطردة لأن الفترات من $f(x-)$ إلى $f(x+)$ إذا لم تكن خالية فإنها مجموعة من الفترات المنفصلة في R_1 (منفصلة لأن f مطردة) وتلك المجموعة قابلة للعد (ارجع بند ٥) . على كل حال سوف نثبت أن المجموعة التي تحتوى على قفزات دالة مطردة من الممكن أن تكون أي

مجموعة قابلة للعد على الإطلاق حتى بالإمكان أن تكون كثيفة، كجميع النقاط القياسية في فترة ما مثلا. لتكن $\{x_n\}$ مجموعة معطاة قابلة للعد و j_n أعداداً موجبة بحيث $\Sigma\, j_n < \infty$. نعرف الدوال f_n بوضع $f_n(x) = 0$ لكل $x < x_n$ و $f_n(x) = j_n$ لكل $x \geq x_n$. بطبيعة الحال لن تكون الأعداد x_n مرتبة بشكل تزايدي. السلسلة $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام (راجع اختبار فيرشتراس بند ١٦) لأن $|f_n(x)| \leq j_n$ و $\Sigma\, j_n$ متقاربة. إذا كانت x_0 أي x_n فهي نقطة استمرار لجميع الدوال f_n فهي نقطة استمرار للدالة f (بند ١٦). من جهة أخرى إذا كانت x_m إحدى النقاط x_n فإن دالة واحدة فقط f_m غير مستمرة عند x_m. لذا $\sum_{n \neq m} f_n = f - f_m$ تكون مستمرة عند x_m. بالتالي f غير مستمرة عند x_m لأنها مجموع دالتين إحدا هما مستمرة والأخرى غير مستمرة هناك. في الواقع f لها قفزة بمقدار j_m عند x_m. من المعقول أن نسمي مثل هذه الدالة f دالة ذات قفزة صريحة أو فعلية Pure jump. بشكل عام نسمي f دالة ذات قفزة صريحة إذا أُنشئت بطريقة مشابهة ولكن من المحتمل أن يكون لها قفزتان واحدة من الجهة اليمنى والأخرى من الجهة اليسرى بحيث $f(x_m-) \neq f(x_m) \neq f(x_m+)$. إذا انشأنا دالة ذات قفزة صريحة بحيث قفزاتها من الجهة اليمنى والجهة اليسرى هي تلك التي لدالة معطاة g غير تناقصية فإن $g - f$ تكون أيضاً غير تناقصية وكذلك مستمرة.

ربما يبدو من البديهي أن الدالة ذات القفزة الصريحة لابد وأن يكون تفاضلها يساوي صفراً فيما عدا عند قفزاتها. هذا التخمين قريب من الصحة: تفاضل دالة ذات قفزة صريحة يساوي الصفر فيما عدا عند مجموعة قياسها صفراً، لكن هذه المجموعة ربما تحتوي على نقاط أكثر من القفزات(٤٤). عن طريق مناقشة بعض الحالات الخاصة نستطيع أن نحصل على فكرة أفضل لما يمكن أن يحدث. لتكن f دالة من ذلك النوع وقفزاتها بمقدار 2^{-n} عند النقاط $3^{-n}, n = 1, 2, \ldots$، لتكن g ذات قفزة صريحة وقفزاتها بمقدار 3^{-n} عند النقاط 2^{-n} و $f(0) = g(0) = 0$، فإن f و g مستمرتان (من اليمين) عند الصفر. على كل حال من السهل أن نثبت أن $f'_+(0) = +\infty$ بينما $g'_+(0) = 0$. في الحقيقة إذا كانت $h > 0$ نحصل على $(f(0 + h) - f(0))/h = f(h)/h$ وإذا كانت $3^{-m-1} < h < 3^{-m}$ فإن

$f(h) = \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-m}$ لذا $f(h)/h > 3^m/2^n \to \infty$. بطريقـة مشـابهـة، إذا كانـت $2^{-m-1} < h < 2^{-m}$ نحـصـل على $g(h) = \sum_{k=m+1}^{\infty} 3^{-k} = \frac{1}{2} 3^{-m}$ ، لذا $g(h)/h < 2^m/3^m \to 0$.

تمرين (٢٢-٤)

أنشيء دالة مطردة ذات قفزة صريحة بحيث يكون 0 نقطة نهاية لقفزاتها ويكون $f'_+(0)$ موجباً ومحدوداً .

يبدو أنه لاتوجد طريقة أبسط بشكل رئيسي لإثبات أن للدالة ذات قفزة صريحة تفاضلاً مساوياً للصفر في كل مكان تقريبا فيما عدا اللجوء إلى النظرية العامة (التي سنثبتهـا الآن) والتي تنص على أن لكـل دالـة مطردة تفـاضـلاً محدوداً في كل مكان تقريباً .

إن الشيء المـدهش حقـاً هو إمكـانية وجود دالة مستمرة مطردة ليست ثابتة وتفاضلها يساوى صفراً تقريباً في كل مكان. الدالة التي تتمتع بهذه الخاصية تسمى دوالاً شاذة مطردة Singular monotonic . سوف ننشيء دالة من هذا النوع بشيء من التفصيل لأنه بالإمكان استخدامها في تطبيقات متعددة. من الممكن أيضاً الحصول على دالة مشابهة غير ثابتة في أي فترة لكن بناء مثل هذه الدالة بطبيعة الحال سيكون أكثـر تعقيداً ولـذا سوف نغفله[٤٥] . سوف نعتمـد في بنـائنا لهذه الدالة على مجموعة كانتور المذكورة في البند ٦ ، هذه الدالة ثابتة في كل فترة متممة لهذه المجموعة ولذا فتفاضلها سيكون بالتأكيد مساوياً للصفر فيما عدا ربما عند نقاط مجموعة كانتور، والتي قياسها صفر. إذا كانت X أي نقطة في الفترة [0, 1] نكتب $X = 0 . a_1a_2a_3 \ldots$ في النظام الثلاثي لدا كل a_k إما 0 أو 1 أو 2 . أطراف الفترات المتممة لمجموعة كانتور هي الأعداد التي تمثيلها الثلاثي منته بحيث يمكن كتابتها بدون استخدام 1 ، على سبيل المثال $\frac{1}{3} = 0.100 \ldots = 0.022 \ldots$ ، $\frac{2}{3} = 0.200 \ldots$. إذا نصفنا جميع الأعداد في ذلـك التمثيل وفسرنـا النتيجـة على أنها عدد مكتـوب في النظام الثنائي نحصل على الأعداد المتساوية $0.0111 \ldots$ و $0.100 \ldots$ (في النظام الثنائي) .

هذا ينـطبق على زوج من طرفي فترة متممـة . لنعرف دالة f بكتابة جميع النقاط

المجموعة كانتور في النظام الثلاثي بحيث لانستخدم 1 x وبتنصيف جميع الأعداد تم بوضع f(x) تساوى العدد الناتج مفسراً حسب النظام الثنائي . بهذا نكون عرفنا f على مجموعة كانتور وقد رأينا أنفاً أن للدالة f نفس القيمة عند طرفي كل فترة متممة . نستطيع أن نوسع f لجميع النقاط في [0, 1] بواسطة إعطائها في كل فترة متممة نفس القيمة التي لها في طرفي هذه الفترة . الآن لابد أن نثبت أن f مطردة ومستمرة ومن المناسب أيضاً دراسة تفاضلات f عند نقاط مجموعة كانتور.

إذا كانت x و y نقطتين من مجموعة كانتور ليست بأطراف فترة وكانت $x < y$ فإن التمثيل الثلاثي للعددين x و y هو

$$y = 0 \cdot a_1a_2a_3 \ldots a_nb_{n+1} \ldots \text{،} \quad x = 0 \cdot a_1a_2a_3 \ldots a_na_{n+1} \ldots$$

حيث $b_{n+1} > a_{n+1}$. التمثيل الثنائي لـ f(x) و f(y) متطابق إلى الخانة النونية بينما الخانة $n + 1$ لـ f(y) أكبر بواحد من الخانة $n + 1$ للعدد f(x) . هذا يعني أن $f(y) > f(x)$. لذا f غير تناقصية .

بما أن f مستمرة في الفترات التي تكون فيها ثابتة لذا يلزمنا أن نعتبر استمراريتها عند نقاط مجموعة كانتور فقط . لتكن x إحدى هذه النقاط . أي جوار لـ x يحتوى على كل النقاط y من مجموعة كانتور التي تبعد عن x بما لايزيد عن 3^{-n} أي أنه يحتوى على جميع النقاط التي تختلف عن x بالأعداد التي تمثيلها الثلاثي يبدأ بـ n من الأصفار على الأقل . التمثيل الثنائي لـ f(y) إذن يختلف عن مثيله لـ f(x) بعدد تمثيله الثنائي يبدأ بـ n من الأصفار على الأقل، لذا f(y) تبعد عن f(x) بما لايزيد عن 2^{-n} . بما أن قيمة f(y) لأى نقطة y ليست من ضمن مجموعة كانتور لكنها في نفس الجوار لـ x تساوى قيمة f عند أي من طرفي الفترة المتممة الحاوية على y ، لذا فإن f مستمرة عند x .

بالتالي نكون قد أثبتنا أن f مستمرة ومطردة وغير ثابتة وشاذة . الآن نبحث في قابلية f للتفاضل عند نقاط مجموعة كانتور. عند الطرف الأيسر لفترة متممة، التفاضل من اليمين f'_+ موجود ويساوى صفراً، بطريقة مشابهة $f'_-(x)$ عند الطرف

الأيمن X . لنعتبر أولاً المشتقات عند أطراف الفترات المتممة، على وجة التحديد عند الطرف الأيمن $x = 0 . a_1a_2 \dots a_n 000 \dots$. إذا كانت h بين 3^{-m} و 3^{-m-1} و $m > n$ فإن $f(x + h)$ تبعد عن $f(x)$ بمقدار بين 2^{-m} و 2^{-m-1} لذا فإن $[f(x + h) - f(x)]/h$ لابد وأن تقع بين $\frac{2^{-m}}{3^{-m-1}}$ و $\frac{2^{-m-1}}{3^{-m}}$ لذا عندما $h \to 0$ (وبذلك $m \to \infty$) هذا الكسر يؤول إلى $+ \infty$. أي أنه عند الطرف الأيمن لانحصل على $f'_+(x) = + \infty$ و $f_-(x) = 0$. بطريقة مشابهة $f'_-(x) = + \infty$ و $f'_+(x) = 0$ عند الطرف الأيسر.

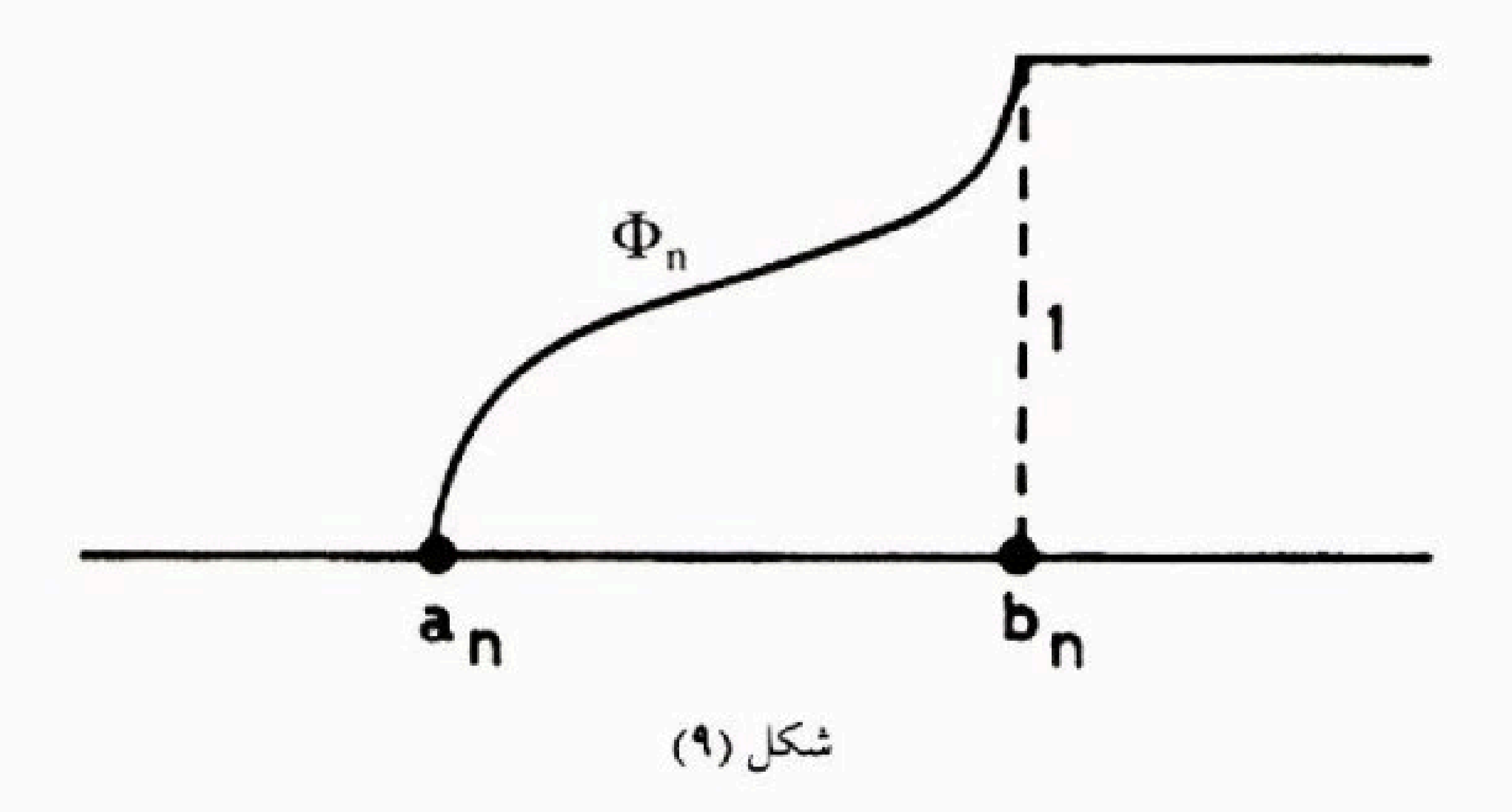
عند نقاط النهاية التي ليست أطرافاً من الممكن إثبات أن $f^+ = + \infty$ بينما f_+ تأخذ أي قيمة بين صفر و $+ \infty$.

كتطبيق لهذه الدالة الشاذة نستطيع أن ننشيء المثال الذى ورد ذكره في (بند ٣) لدالتين لهما نفس التفاضلات (غير محدودة عند بعض النقاط) في فترة ما لكن لايختلفان بثابت. نحتاج بجانب الدالة الشاذة التي انشأناها آنفاً دالة أخرى g تكون مستمرة وغير تناقصية ولها تفاضل محدود عند كل نقطة لاتنتمي لمجموعة كانتور، وتفاضل يساوى $+ \infty$ عند كل نقطة من هذه المجموعة. عندما نحصل على مثل هذه الدالة g نستطيع أن نضع $h(x) = f(x) + g(x)$ وبالتالي $h'(x) = g'(x) = + \infty$ عند كل نقاط مجموعة كانتور (وذلك لأن جميع مشتقات f غير سالبة). كذلك $h'(x) = g'(x)$ عند كل النقاط التي لاتنتمي إلى هذه المجموعة لأن $f'(x) = 0$ عند مثل تلك النقاط. على كل حال g و h يختلفان بمقدار يساوى f وهذا ليس بثابت.

الآن نبين كيفية بناء g[٤٦]. لنسرد الفترات المتممة (a_n, b_n) لمجموعة كانتور بترتيب تناقصي بالنسبة لأطوالها (ترتيب الفترات المحدودة العدد ذات الطول نفسه لا أهمية له هنا). كما في شكل (٩).

لتكن $\Phi(n)$ دالة مستمرة غير تناقصية لها المنحنى المبين أعلاه: $\Phi_n(x) = 0$ لكل $x < a_n$ ، $\Phi_n(x) = 1$ لكل $x > b_n$ ، $\Phi'_n + (a_n) = \Phi'_n - (b_n) = + \infty$. (على سبيل المثال)

$$(\Phi_n(x) = (2/\pi)\tan^{-1}\{(x - a_n)^{1/2}(b_n - x)^{-1/2}\})$$

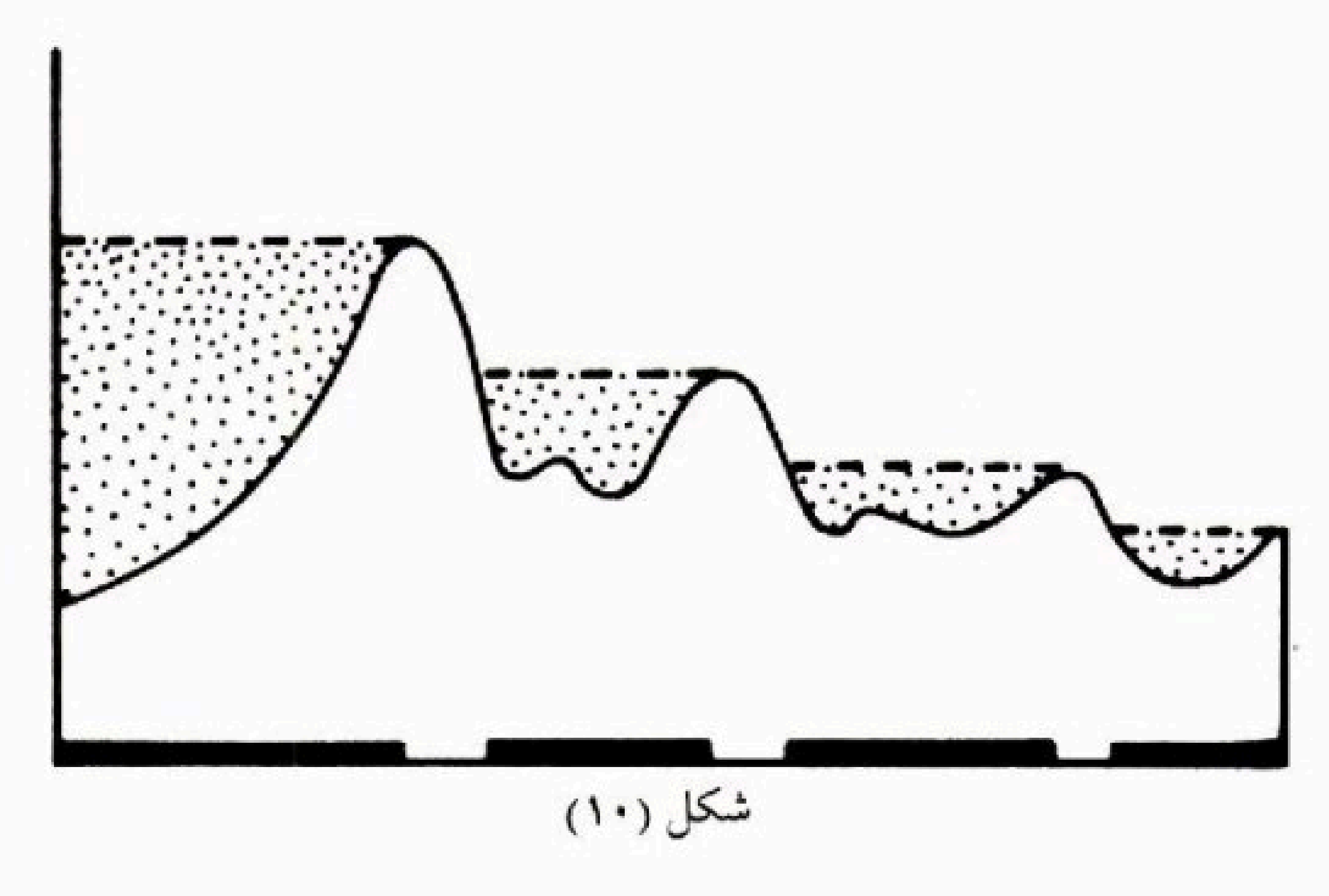


شكل (٩)

الآن نلاحظ أن أطوال الفترات (a_n, b_n) تساوى مضاعفات صحيحة سالبة للعدد 3 . لتكن $h_n = (2/5)^m$ عندما يكون طول (a_n, b_n) يساوى 3^{-m} وعرف $g(x) = \sum_{n=1} h_n\Phi_n(x)$ أي أن $g(x)$ تساوى مجموع الأعداد h_n على جميع (a_n, b_n) الواقعة على يسار x بالإضافة إلى $h_k\Phi_k(x)$ إذا كانت x تنتمى إلى (a_k, b_k) . الآن توجد 2^{m-1} من الفترات (a_n, b_n) طول كل منها 3^{-m} و $h_n = (2/5)^m$ في كل منها لذا $\Sigma\, h_n$ متقاربة، وبالتالي فالسلسلة التي تعرف g متقاربة بانتظام ولذا g مستمرة. كذلك نلاحظ أنها غير تناقصية. لتكن x نقطة من مجموعة كانتور تختلف عن a_n ودع $\delta > 0$. الكسر $\Delta = \delta^{-1}\{g(x+\delta) - g(x)\} = \delta^{-1}h_n\{\Phi_n(x+\delta) - \Phi_n(x)\}$ أكبر من h_k إذا كانت الفترة $(x, x+\delta)$ تحتوى على فترة متممة (a_k, b_k) . من السهل أن نرى أن $(x, x+\delta)$ دائما تحتوى على فترة متممه طولها $3^{-m} \geqq \delta/9$. لذا $\Delta \geqq (2/5)^m/\delta \geqq 1/9\, 3^m(2/5)^m \to \infty$ وبالتالي $f'_+(x) = +\infty$. إذا كانت x تساوى a_n فإن $g'_+(x) = +\infty$. بطريقة مشابهة $g'_-(x) = +\infty$ عند كل x في مجموعة كانتور. أي أن $g'(x) = +\infty$ عند كل x في تلك المجموعة.

الآن نرجع إلى الإثبات الصعب نوعاً ما للحقيقة التالية للدالة المطردة تفاضلاً محدوداً في كل مكان تقريبا[٤٧] . بإمكان القارىء أن يقفز إلى (بند ٢٢) إذا كان مهتمًا أولاً برؤية بعض التطبيقات لهذه النظرية. الإثبات يعتمد على نتيجة تعزي إلى ريز Riesz وتعرف بنتيجة «الماء المتدفق» أو «الشمس الشارقة». إذا كانت g دالة مستمرة من فترة I إلى R_1 وإذا كان منحنى g هو مقطع لمجرى نهر و E مجموعة النقاط حيث يجري الماء فإن من البديهي أن تتكون E من فترات مفتوحة بحيث g تأخذ قيمًا

متساوية عند أطرافها وإذا كان المنحنى هو ظل جبل وكانت الشمس تشرق في اتجاه الإحداثي السيني الموجب وإذا كانت E هي مجموعة النقاط التي في الظل فمرة أخرى من البديهي أن E تتكون من فترات مفتوحة بحيث g تأخذ قيمًا متساوية عند أطرافها (في كلتي الحالتين ربما توجد فترة متميزة في الطرف الأيسر كما في الشكل (١٠)).



شكل (١٠)

فيمايلي النص التجـريدي للنتيجة: لتكن g دالة مستمرة في فترة I فيما عدا بعض القفزات ولتكن G معرفة كمايلي $G(x) = \max (g(x-), g(x), g(x+))$ المجموعة E من النقاط x بحيث توجد $x < y$ و $g(y) > G(x)$ تكون مجموعة مفتوحة وإذا كان (a, b) أي فترة من الفترات التي تتكون منها E فإن $g(a+) \leqslant G(b)$.

إذا بدلنـا اليسـار باليمين وعرفنا E' لتكون المجموعة من النقاط x بحيث يوجد $x > y$ و $g(y) > G(x)$ فإنه بطريقة مشابهة، إذا كانت E' اتحاد الفترات المفتوحة (a', b') فإننا نحصل على $G(a') \geqslant g(b'-)$.

سنثبت أولاً أن E مفتـوحـة. لتكن $x_0 \in E$ فإنـه توجـد $x_0 < y$ بحيث $g(y) > G(x_0)$. يلزمنـا أن نثبت أن هذه الخـاصية تتحقق لجميع x بالقرب من x_0. إذا تحركت x بمقـدار ضئيل إلى اليسـار من x_0 فإن $g(x_0)$ يكون قريباً من $g(x-)$ وإذا تحركت بمقـدار ضئيل إلى اليمين فإن $g(x_0)$ يكون قريباً من $g(x+)$; في كلتي الحـالتـين $G(x)$ لاتـزيد عن $G(x_0)$ إلاَّ بمقدار ضئيل فقط. بما أن $g(y) > G(x_0)$ نحصـل أيضـاً على $g(y) > G(x)$ طالما $G(x)$ لا تزيد عن $G(x_0)$ إلاَّ بمقدار ضئيل وهذه هي الحالة إذا كانت x قريبة من x_0.

لإثبات الجزء الثاني من النتيجة ليكن (a, b) إحدى الفترات التي تتكون منها E بحيث b لاتنتمي إلى E . لتكن $a < x < b$ فإنــه يكفي أن نثبت أن $g(x) \leq G(b)$ ومن ثم دع $x \to a+$. بما أن $x \in E$ فإنه توجد نقاط $y > x$ بحيث $g(y) > G(x)$ ولذا $G(y) \geq g(x)$. الآن نبــين أن b من تلك النقــاط إذا لم تكن هذه هي الحــالــة فإن $G(b) < g(x)$. لتكـن z_1 أصغــر حد علوي للنقــاط z في $[x, b]$ بحيث $G(z) \geq g(x)$. (يوجـد مثـل تلك النقاط على سبيل المثال x ونحن نحاول أن نثبت أن $z_1 = b$). إذا كانــت $z_1 \neq b$ فإن z_1 تنـتـمـي إلى E وبـالـتـالي توجـد $y > z_1$ بحـيث $g(y) > G(z_1)$ مخالـفـاً لتعـريف z لذا $y > b$. ولكن بما أن b لاتـنـتـمـي إلى E فإن $g(y) \leq G(b)$. بالـتـالي إذا كانـت $G(b) < g(x)$ فإن $g(x) \leq G(z_1) < g(y) \leq G(b) < g(x)$ وهذا غير ممكن.

سوف نستنتـج قابلية التفاضل لدالة غير تناقصية من نتيجتين لنظرية ريز. سنصـل إليهما عن طريق إثبات أولاً أن نظريتنا ستتحقق إذا أثبتنا أن $f^+(x) < +\infty$ وأن $f^+(x) < f_-(x)$ في كل مكان تقريباً. لتبسيط الرموز تفترض أن منتصف الفتره (a, b) عند الصفر. الآن نستطيع أن نعكس منحنى f حول نقطة الأصل لنحصل على منحنى الدالة f_0 التي قيمتها عند x تساوى $-f(-x)$. هذه الدالة غير تناقصية أيضاً وتفاضلها السفلي من اليمين عند x يساوى تفاضل f السفلي من اليسار عند $-x$; في الحقيقة

$$\frac{f_0(x+h) - f_0(x)}{h} = \frac{-f(-x-h) - (-f(-x))}{h}$$

$$= \frac{f(-x + (-h)) - f(-x)}{-h}$$

إذا كان $f^+(x) \leq f_-(x)$ يتحقق في كل مكان تقريباً لكل f غير تناقصية فانه يتحقق أيضــاً إذا استبـدلنا f بــ f_0 و x بــ $-x$. أي أن $f^-(x) \leq f_+(x)$ لجميع قيم x تقريباً ولذا $f^+(x) \leq f_-(x) \leq f^-(x) \leq f_+(x) \leq f^+(x)$ لجميع قيم x تقريباً.

إذا كان $f^+(x) < \infty$ لجميع قيم x تقـريباً فالمتراجحة السابقة تبين أن كل التفاضلات الأربعة متساوية ومحدودة لجميع قيم x تقريباً، أي أنه يوجد تفاضل محدود لجميع قيم x تقريباً.

الآن نستطيع أن نبسط المسألة أكثر من ذلك فيكفي أن نثبت أن قياس المجموعة حيث $f_-(x) < r < R < f^+(x)$ يساوى صفراً مهما كانت قيمة r و R . لأنه إذا $f^+(x) > f_-(x)$ فإنه يوجد عددان قياسيان r و R بحيث $f_-(x) < r < R < f^+(x)$ بما أنه يوجد عدد قابل للعد فقط من الأزواج من الأعداد القياسية فإن المجموعة حيث $f^+(x) > f_-(x)$ محتواة في اتحاد عدد قابل للعد من المجموعات التي قياسها صفراً ولذا فقياسها يساوى صفراً.

فيما يلي نص النتيجتين لنظرية ريز والتي يعتمد عليهما الإثبات

١) لتكن f غير تناقصية في $[a, b]$ و E_R مجموعة نقاط استمرار f و $f^+(x) > R$ فإنه بالإمكان تغطية E_R بمجموعة قابلة للعد من الفترات (a_k, b_k) مجموع أطوالها $\Sigma\, (b_k - a_k)$ يساوى على الأكثر:

$$R^{-1} \sum [f(b_k+) - f(a_k+)] \leqslant [f(b-) - f(a+)]/R$$

٢) لتكن f غير تناقصية في $[a, b]$ و E_r مجموعة نقاط استمرار f و $f_-(x) < r$ فإنه بالإمكان تغطية E_r بمجموعة قابلة للعد من الفترات (a_k, b_k) بحيث:

$$\sum [f(b_k-) - f(a_k +)] \leqslant r \sum (b_k - a_k) \leqslant r(b - a)$$

سوف نؤجل إثبات هاتين النتيجتين حتى نبين كيف نستنتج النظرية منهما.

أولا نلاحظ أن (١) تؤدى إلى أن $f^+(x) < +\infty$ في كل مكان تقريباً. لأنه إذا كان $f^+(x) = +\infty$ في E فإن الافتراض في (١) ينطبق لكل R موجب ولذا تكون E مغطاه بفترات (a_k, b_k) مجموع أطوالها يساوى على الأكثر $[f(b-) - f(a+)]/R$ لكل R . أى أن E مغطاة بفترات ذات طول صغير اختيارى لذا قياسها يساوى صفراً.

بعد ذلك لنعتبر المجموعة E حيث f مستمرة و $f_-(x) < r < R < f^+(x)$ ، ولذا كلا الافتراضين في (١) و (٢) متحققان باستخدام (١) لكل من الفترات (a_k, b_k) في (٢) نجد أن الجزء من E في (a_k, b_k) مغطى بفترات مجموع أطوالها (نسميه L_k مثلاً) يساوى $\{f(b_k-) - f(a_k +)\}/R$ على الأكثر. بجمع هذه المتراجحات لجميع (a_k, b_k) وبتطبيق (c) نجد أن:

$$\sum L_k \leqslant (1/R) \sum \{f(b_k -) - f(a_k+)\} \leqslant (r/R)(b - a)$$

نفس النقاش السابق ينطبق على أي فترة جزئية من (a, b) أي أن الجزء من E في أي فترة (p, q) يكون مغطى بفترات مجموع أطوالها يساوى على الأكثر $(r/R)(q - p)$. الآن لتكن E مغطاه (بأي طريقة) بفترات جزئية (p_k, q_k) (سواء أكانت متداخلة أم لم تكن). بالإمكان تغطية الجزء من E في (p_k, q_k) بفترات غير متداخلة مجموع أطوالها $(r/R)(q_k - p_k)$ على الأكثر ولذا من الممكن تغطية E بفترات مجموع أطوالها $(r/R)\Sigma(q_k - p_k)$ على الأكثر. وجود مثل هذا الغطاء يؤدى إلى أن قياس E يساوى صفراً (تمرين ١١-١).

الآن نرجع إلى إثبات (١) و (٢).

١) إذا كانت $x \in E_R$ فإنه توجد $y > x$ بحيث $\{f(y) - f(x)\}/(y - x) > R$ أي أن $f(y) - Ry > f(x) - Rx$. طبق نظرية ريز على الدالة g حيث $g(x) = f(x) - Rx$. بما أن f مستمرة عند x فكذلك g و $G(x) = g(x)$. لذا نستنتج أن E_R مغطاة بمجموعة قابلة للعد من الفترات (a_k, b_k) بحيث $G(b_k) \geqslant g(a_k+)$ ، أي أن $f(b_k+) - Rb_k \geqslant f(a_k+) - Ra_k$ ولذا $f(b_k+) - f(a_k) \geqslant R(b_k - a_k)$ بجمع هذه المتراجحات لقيم k المختلفة وباستعمال الحقيقة أن f غير تناقصية نحصل على:

$$R\, \Sigma\, (b_k - a_k) \leqslant \Sigma\, (f(b_k+) - f(a_k+))$$

٢) إذا كانت $X \in E_r$ فإنه توجد $y < x$ بحيث $\{f(y) - f(x)\}/(y, x) < r$ أي أن (وذلك لأنه $y < x$): $f(y) - f(x) > (y - x)r$ أو $f(y) - ry > f(x) - rx$ يمكن تطبيق نظرية ريز بعد عكس المتراجحة السابقة على الدالة g المعرفه بـ $g(x) = f(x) - rx$ ، لنجد أن E_r مغطاة بمجموعة من الفترات (a_k, b_k) بحيث $g(b_k-) \leqslant G(a_k)$. بما أن f غير تناقصية فوجود مثل هذا الغطاء يقتضي ان $f(b_k-) - rb_k \leqslant f(a_k+) - ra_k$ أي أن $f(b_k-) - f(a_k+) \leqslant r(b_k - a_k)$ بالجمع على جميع الفترات نحصل على الاستنتاج في (٢).

الآن نعطي بعض التطبيقات الشيقه لنظرية تفاضل الدوال المطردة والتي تساعد على تبرير الجهد الذى بذل لإثبات هذه النظرية.

(أ) تفاضل سلسلة من الدوال المطردة (نظرية فوبيني Fubini [٤٨]).

لتكن $f_1 + f_2 + \ldots$ سلسلة من الدوال غير التناقصية المتقاربة نقطياً في فترة ما $[a, b]$ ومجموعها S. فإنه تقريباً لكل x في $[a, b]$ نحصل على $f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots = S'(x)$.

هذا مثال واحد لنظرية من الأسهل أن نكتب نصها بدلالة سلسلة بدلاً من متتاليات.

إذا اسثنينا مجموعة قياسها صفر فإنه لجميع الدوال f_n تفاضلات غير سالبة وكذلك للدالة S لأنها أيضاً غير تناقصية. حدود السلسلة $f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots$ غير سالبة ولذا فمجاميعها الجزئية $S_n'(x)$ تكون متتالية غير تناقصية (لكل x). لذا فهي متقاربة إذا كانت مجاميعها الجزئية محدودة. لكن:

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \ldots$$

$$\geqslant \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \ldots + \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}$$

وذلك لأن f_n غير تناقصية. دع $h \to 0$ لنستنتج أن $S'(x) \geqslant S_n'(x)$ حيثما كان الطرف الأيسر محدود، أي في كل مكان تقريباً. لذا فسلسلة التفاضلات متقاربة لكل x ويبقى علينا فقط أن نتأكد من أنها تؤول إلى المجموع الصحيح.

لكي نتعرف على مجموع سلسلة التفاضلات، أولاً نبين أنه توجد متتالية جزئية من مجاميعها الجزئية تتقارب إلى $S'(x)$ في كل مكان تقريباً. نلاحظ أن $S(b) - S_n(b) \to 0$، لذا لابد وأن توجد متتالية جزئية من الأعداد الصحيحة n بحيث $\Sigma\, (S(b) - s_n(b))$ تكون متقاربة (نختار n التي تجعل الفرق أقل من $1/2$ ومن ثم نختارها أكبر من العدد السابق بحيث تجعل الفرق أقل من $1/4$ وهكذا). لقيم n في هذه المتتالية الجزئية نحصل على $S(x) - S_n(x) \leqslant S(b) - S_n(b)$ لأن $S(x) - S_n(x)$ هو ذيل السلسلة $S(x)$ ولذا يعرف دالة غير تناقصية. بالتالي $\Sigma\, S[(x) - S_n(x)]$

(مجموعة لنفس قيم n السابقة) تكون سلسلة متقاربة من الدوال غير التناقصية. كما أثبتنا آنفاً فإن سلسلة التفاضلات $\Sigma [S'(x) - S'_n(x)]$ متقاربة في كل مكان تقريباً، ولذلك فحدها العام يقترب من الصفر في كل مكان تقريبا. أي أننا قد وجدنا متتالية جزئية من المجاميع الجزئية $S_n(x)$ بحيث $S'_n(x) \to S'(x)$ في كل مكان تقريباً. بما أن المتتالية بكاملها من المجاميع الجزئية متقاربة في كل مكان تقريباً فلابد أن تكون متقاربة إلى نهاية المتتالية الجزئية، أي إلى $S'(x)$.

(ب) كثافة المجموعات

لتكن E مجموعة في R_1. نقول إن النقطة x (سواء أكانت في E أم لم تكن) هي نقطة تكثف Density للمجموعة E إذا كانت الجوارات الصغيرة بقدر كاف لـ x تحتوى «بشكل كبير» على نقاط من E. ليس من السهل صياغة هذا التعريف بشكل دقيق. أولا لنغط E بعدد قابل للعد من الفترات المفتوحة. بالإمكان عمل هذا بعدة طرق: نأخذ أكبر حد سفلي لمجموع أطوال هذه الأغطية على أساس أنه قياس لحجم E ونسميه القياس الخارجي Outermeasure لـ E ونرمز له بـ $\mu(E)$. إذا كانت I فترة فإن $\mu(I)$ يمثل طولها المعتاد. إذا كانت E_1 و E_2 مجموعتين تقعان في فترتين منفصلتين فإن $\mu(E_1 U E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$. الآن دع N ترمز لجوار للنقطة x فنقول إن x نقطة تكثف لـ E إذا كان $\mu(E \cap N)/\mu(N) \to 1$ عندما $\mu(N) \to 0$، أي بمعنى إذا كان القياس الخارجي للجزء من E الواقع في جوار صغير لـ x يساوى تقريباً طول هذا الجوار. هناك تعريف مشابه لهذا بالنسبة لمجموعات في R_n.

سوف نثبت الأن أن جميع نقاط E تقريباً هي نقاط تكثف لـ E. بشكل عام هذا يعني كل فترة تقريباً (قارن ذلك مع تمرين ١١-١). نفس النظرية تتحقق أيضا في R_n.

لنفترض أن قياس E ليس بصفر وإلاّ كانت النظرية خالية المحتوى. بالإمكان الافتراض أيضاً أن E محدودة وبالتالي تقع في فترة ما متراصة I. عرف الدالة λ بوضع $\lambda(x)$ تساوى القياس الخارجي للجزء من E الواقع يسار x إذا كانت λ غير تناقصية فنثبت أن $\lambda'(x) = 1$ تقريباً لكل قيم x في E.

لتكن f دالة مشابهة لـ λ نحصل عليها باستعمال غطاء ثابت لـ E بعدد قابل

للعد من الفترات، أي أن $f(x)$ تساوى الطول الكلي لفترات هذا الغطاء الواقعة على يسار x . الآن $f'(x) = 1$ عندما $x \in E$ ، لأنه إذا كانت $x \in E$ و h صغيرة بقدر كاف فإن $x + h$ تقع في إحدى الفترات المفتوحة المغطية لـ x ، ولذا $f(x + h) - f(x) = h$. خذ متتالية من الأغطية لـ E مجموع أطوالها μ_n تقترب من $\mu(E)$ بسرعة كافية بحيث $\Sigma(\mu_n - \mu(E))$ تكون متقاربة. لتكن f_n الدالة f المرتبطة بالغطاء النوني. لذا $f_n(x) \to \lambda$ و $f_n(x) - \lambda(x) \leqslant \mu_n - \mu(E)$ بالإضافة إلى ذلك فإن $f_n - \lambda$ دالة غير تناقصية. الآن $\Sigma[f_n(x) - \lambda(x)]$ متقاربة وبواسطة نظرية فوبيني سلسلة التفاضلات $\Sigma[f_n'(x) - \lambda'(x)]$ متقاربة في كل مكان. لذا فحدود هذه السلسلة تقترب من الصفر في كل مكان تقريباً. بما أن $f_n'(x) = 1$ في كل مكان تقريباً في E فلابد أن تكون $\lambda'(x) = 1$ في كل مكان تقريباً في E .

(جـ) قياس المحل الهندسي[٤٩] The Measure of Locus

لتكن F مجموعة متراصة في R_1 . إذا كانت x لاتنتمي إلى F فإنه توجد مسافة موجبة من x إلى F وهذه المسافة تحصل من x إلى نقطة ما في F (تمرين ٨-٩). لنأخذ المجموعة E_r من النقاط التي على مسافة r من F حيث $r > 0$ ، فإن قياس E_r صفر، لأنه إذا لم يكن كذلك فإنها (أي E_r) تحتوى على نقطة تكثف، لتكن y تلك النقطة ولتكن x نقطة في F على مسافة r من y . الجوار N للنقطة x الذى نصف قطره r لايمكن أن يحتوى على أي نقطة من E_r لأن جميع نقاط N تقع على مسافة أقل من r من النقطة y . لأن أي جوار I للنقطة y نصفه في N ولذا $I \cap C(E_r)$ يحتوى على فترة طولها على الأقل نصف طول I . وجود مثل هذه الفترات يناقض افتراض أن y نقطة تكثف للمجموعة E_r .

٢٣ - الدوال المحدبة(Convex Functions)

نقتصر في هذا النقاش على الدوال من فترة في R_1 إلى R_1. عادة تسمى الدالة محدبة إذا كان الجزء من منحناها في كل فتره يقع على أو أسفل وترها. سوف نثبت الحقيقة الملفتة للنظر وهي أن الدالة المستمرة تكون محدبة إذا افترضنا فقط أن نقطة المنتصف لكل وتر تقع على أو فوق منحنى f . في الحقيقة بالإمكان الاستغناء عن شرط

الاستمرارية بافتراض أن الدالة محدودة في فترة ما صغيره[٥٠]. لذا إذا كان لدالة غير مستمرة الخاصية السابقة (المتعلقة بوضع النقطة الوسطى) فإن منحناها لابد وأن يأخذ شكل عشوائي. لدوال الخطية غير المستمرة المذكورة في بند ٢٠ تعطينا مثالا لذلك النوع من الدوال.

من الممكن صياغة الجملة الهندسية المتعلقة بالوتر تحليلياً كمايلي:

إذا ذكرنا ان منتصف أي وتر يقع على أو فوق المنحنى فهذا يعني أن $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$ لكل x و y في النطاق، وإذا قلنا إن كل الوتر يقع على أو فوق المنحنى فهذا يعني أن $f(q_1x + q_2y) \leqslant q_1f(x) + q_2f(y)$ طالما $q_1 + q_2 = 1$ و $q_1 \geqslant 0, q_2 \geqslant 0$. سوف نثبت أنه عندما تكون f مستمرة فإن المتراجحة الأولى (لكل x و y) تقتضي الثانية.

من الأسهل أن نكتب المتراجحة الأولى بصيغة مختلفة نوعاً ما. ضع $\Delta_hf(x) = f(x+h) - f(x)$ لذا فإن $\Delta_h\Delta_kf(x) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)$. بعد ذلك نكتب $\Delta_h\Delta_hf(x) = \Delta_h^2f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$ ولذا فإن المتراجحة المتعلقة بالنقطة الوسطى تعني أن $\Delta_h^2f(x) \geqslant 0$ عندما تكون x و $x + 2h$ في نطاق الدالة f. (هنا h ربما تكون موجبة أو سالبة).

بالأمكان صياغة المتراجحة الثانية كالتالي: -

$$\frac{\Delta_gf(x)}{g} \leqslant \frac{\Delta_hf(x)}{h}, \quad 0 < g < h \qquad (*)$$

وذلك بأخذ $(y > x) z = q_1x + q_2y$ و $h = y - x$ و $g = z - x$. هذا يعني أنه إذا ثبتنا النقطة اليسرى من الوتر فإن ميله يكون دالة تزايدية بدلالة طوله. لإثبات أن الدالة المستمرة التي تحقق التعريف الأول للتحدب تحقق أيضاً التعريف الآخر، يلزمنا أن نستنتج (*) من $\Delta_h^2f(x) \geqslant 0$. لعمل ذلك[٥١]، نبدأ بالمتطابقة $\Delta_hf(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{h/n}f(x + ih/n)$ حيث n أي عدد صحيح موجب. إذا أثرنا على الجانبين بالمؤثر Operator $\Delta_{h/n}$ نحصل (إذا كانت $x + h + h/n$ لاتزال في نطاق الدالة) على $\Delta_{h/n}\Delta_hf(x) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{h/n}^2f(x + ih/n) \geqslant 0$.

أي أن $\Delta_h f(x + h/n) - \Delta_h f(x) \geqslant 0$ أو بشكـــل آخـــر $\Delta_h f(x + h/n) \geqslant \Delta_h f(x)$. بما أن هذه المتراجحة صحيحة لكل قيم x بحيث أن جميع النقاط في الصيغة أعلاه من ضمن النـطاق فإننا نستطيع استبدال x بكل من ... ,x + h/n , x + 2h/n . ولذا نجد أنه لأي عدد صحيح موجب m :

$$\Delta_h f(x + mh/n) \geqslant \Delta_h f(x + (m - 1)h/n) \geqslant \dots \geqslant \Delta_h f(x + h/n) \geqslant \Delta_h f(x)$$

الآن إذا كانت x و $x + \delta$ و h أعداد معطاة، نستطيع أن نجد متتاليات من الأعداد القياسية m/n بحيث $mh/n \to \delta$. بعد ذلك نستخدم استمرارية f لنستنتج :

$\Delta_h f(x + \delta) \geqslant \Delta_h f(x)$ من $\Delta_h f(x + mh/n) \geqslant \Delta_h f(x)$.

لقد أثبتنا الآن أن $\Delta_h f(x)$ يزداد بزيادة x لكل h . على وجه الخصوص

$$\Delta_{h/n} f(x) \leqslant \Delta_{h/n} f(x + h/n) \leqslant \dots \leqslant \Delta_{h/n} f(x + (n - 1)h/n)$$

لتكن $0 < m < n$. معدل أول m من الحدود لهذه السلسلة من المتراجحات لايزيد عن معدل أول n من حدودها. أي أن :

$$\frac{\Delta_{h/n} f(x) + \Delta_{h/n} f(x + h/n) + \dots + \Delta_{h/n} f(x + (m - 1)h/n)}{m}$$

$$\leqslant \frac{\Delta_{h/n} f(x) + \dots + \Delta_{h/n} f(x + (x - 1)h/n)}{n}$$

نختصر البسطين لنحصل على :

$$\frac{f(x + mh/n) - f(x)}{m} \leqslant \frac{f(x + h) - f(x)}{n}$$

أي أنه إذا كانت $h > 0$ فإن :

$$\frac{f(x + mh/n) - f(x)}{mh/n} \leqslant \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

إذا كانت $0 < g < h$ فإننا نستطيع اختيار متتالين من الكسور القياسية m/n بحيث $m/n \to g/h$ وبذلك تتحقق (*).

من (*) وبدون افتراض أن f مستمرة نستطيع أن نستنتج ليس فقط أن f مستمرة عند كل نقطة داخلية في الفترات التي تكون فيها f محدبة بل أيضا أن لها تفاضل محدود من الجهة اليمنى وآخر محدود من الجهة اليسرى عند تلك النقاط، هذان التفاضلان غير تناقصيين. بما أن الدالة المطردة مستمرة فيما عدا عند عدد قابل للعد من القفزات فإن التفاضل من الجهة اليمنى للدالة المحدبة حسب (*) يكون مستمراً فيما عدا (ربما) عند مجموعة قابلة للعد. هذا يعني على وجه الخصوص أن الدالة المحدبة تكون مستمرة أيضا. في الحقيقة، النقاط الوحيدة التي لانستطيع استنتاج استمرارية f عندها هي تلك النقاط حيث التفاضل من الجهة اليمنى يختلف عن نظيره من الجهة اليسرى. عند مثل تلك النقاط الدالة مستمرة من كل جهة لذا فإن لها على الأسوأ قفزة بسيطة، لكن عند القفزة البسيطة لايمكن أن يكون لها تفاضلان محدودان من كلا الجانبين.

الآن نستنتج الجملة السابقة عن التفاضلات من (*). نلاحظ أن (*) تعني أن $\Delta_h f(x)/h$ تعرف، لكل x، دالة تزايدية في h. عندما $h \to 0+$ هذه النسبة بالتالي تؤول إلى نهاية، حسب علمنا حتى الآن، قد تكون محدودة أو غير محدودة. أي أن $f'_+(x)$ موجود (سواء كان محدود أو لم يكن) لكل نقطة x داخلية في الفترة المعنية. إذا كانت h سالبة نستنتج بطريقة مشابهة أن $f'_-(x)$ موجود.

نلاحظ أيضاً أنه إذا كانت h موجبة فإن الكمية $\Delta_h f(x)$ تزايدية في x لكل h ثابتة وتزايدية في h لكل x ثابتة (كما يتضح هندسياً). لنفرض أن $0 < g < h$ و $x < y$ ∴ بتطبيق الحقيقتين السابقتين نحصل على $\frac{\Delta_g f(x)}{g} \leqslant \frac{\Delta_h f(x)}{h} \leqslant \frac{\Delta_h f(y)}{h}$ ثبت h ودع $g \to 0$ لنستنتج أن $f'_+(x) < +\infty$. بطريقة مشابهة نحصل على $f'_-(x) > -\infty$. كذلك فإن:

$$\frac{\Delta_{-g} f(x)}{-g} = \frac{f(x-g) - f(x)}{-g} = \frac{f(x) - f(x-g)}{g} = \frac{\Delta_g f(x-g)}{g} \leqslant \frac{\Delta_g f(x)}{g}$$

ولذا $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$. أخيراً بما أن :

$$\frac{\Delta_h f(x)}{h} \leqslant \frac{\Delta_h f(y)}{h},\ y > x$$

نستنتج أن f'_+ غير تناقصية وكذلك الحال بالنسبة للدالة f'_-.

نلاحظ أن خاصية التحدب المألوفة في حساب التفاضل والتكامل في الواقع كافية . لنفترض $f''(x)$ موجود وغير سالب عند كل نقطة من فترة ما . إذاً لكل x بداخل هذه الفترة ولكل h موجبة وصغيرة نحصل (عن طريق تطبيق نظرية القيمة المتوسطة مرتين) على :

$$\begin{aligned}
f(x+2h) - f(x+h) &= hf'(x+c_1), \quad x+h < c_1 < x+2h \\
f(x+h) - f(x) &= hf'(x+c_2), \quad x < c_2 < x+h \\
\Delta^2 f(x) &= h[f'(x+c_1) - f'(x+c_2)] \\
&= h(c_1 - c_2)f''(c_3) \geqslant 0
\end{aligned}$$

مناقشة شبيهة بذلك تنطبق عندما $h < 0$. إذن f محدبة حسب تعريف النقطة الوسطى .

سوف نعمم الآن الخاصية المعرفة للدوال المحدبة : ليس فقط إن كل وتر يقع على أو فوق المنحنى لكن لو وضعنا أوزان عشوائية موجبة على n من النقاط في المنحنى فمركز ثقلها سوف يقع أيضاً على أو فوق المنحنى . الجملة الأخيرة تعني جبرياً أنه إذا $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$ فإن

$$* \quad f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n) \leqslant q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \ldots + q_nf(x_n)$$

عندما $n = 2$ فهذا يعني أن المنحنى يقع تحت الوتر . (المقارنة * بالخاصية السابقة لابد من كتابة x_1, x_2 بدلا من x, y .

الآن نثبت * بالاستقراء وسنكتب الخطوة الأولى بشيء من التفصيل (وذلك من نقطتين إلى ثلاث نقاط) لأن الحالة العامة مشابهة لذلك) . الآن

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3) = f\left(\frac{q_1x_1 + q_2x_2}{q_1 + q_2}(q_1 + q_2) + q_3x_3\right)$$

بتطبيق مانعرفه على النقطتين $(q_1x_1 + q_2x_2)/(q_1 + q_2)$ و x_3 وباستعمال الوزنين $q_1 + q_2$ و q_3 نحصل على

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3) \leqslant (q_1 + q_2)f\left(\frac{q_1x_1 + q_2x_2}{q_1 + q_2}\right) + q_3f(x_3)$$

الآن باستخدام النقطتين x_1, x_2 والوزنين $q_1/(q_1 + q_2)$ و $q_2/(q_1 + q_2)$ نجد أن

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3) \leqslant (q_1 + q_2) \cdot \frac{q_1}{q_1 + q_2} \cdot f(x_1) + (q_1 + q_2)\frac{q_2}{q_1 + q_2} f(x_2)$$

$$+ q_3f(x_3) = q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + q_3f(x_3)$$

الصيغة * مصدر خصب لمتراجحات عن الأعداد الموجبه(٥٢). على سبيل المثال الدالة المعرفة بـ $f(x) = -\log x,\ x > 0$ محدبه (لأن مشتقتها الثانية موجبة)، لذا:

$$-\log(q_1x_1 + \dots + q_nx_n) \leqslant -q_1 \log x_1 - \dots - q_n \log x_n \quad \text{إذا} \quad q_1 + \dots + q_n = 1$$

أي أنه $q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n \geqslant x_1x_2 \dots x_n$. هذه المتراجحة تعني أن المتوسط الهندسي لنون من الأعداد الموجبة لايزيد عن متوسطها الحسابي. بالمثل، إذا كانت $f(x) = x^r$ حيث $r > 1$ فإن f محدبه لكل $x > 0$ ولذا

$$(q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n)^r \leqslant q_1x_1^r + q_2x_2^r + \dots + q_nx_n^r$$

لأي n من الأعداد الموجبة x_k في حالة أن $q_1 + \dots + q_n = 1$. نختصر هذه المتراجحة بكتابتها كالتالي $(\Sigma q_kx_k)^r \leqslant \Sigma q_kx_k^r$. الآن لتكن p_k أعداداً موجبة ولنأخذ $q_k = p_k/\Sigma p_k$ لنجد أن $(\Sigma p_kx_k/\Sigma p_k)^r \leqslant \Sigma p_kx_k^r/\Sigma p_k$ أي أن $Sp_kx_k \leqslant (\Sigma p_k)^{1-1/r}\ (\Sigma p_kx_k^r)^{1/r}$.

إذا وضعنا $x_k = z_k y_k^{-1/(r-1)}$ و $p_k = y_k^{r/(r-1)}$ نحصل على

$$\sum y_k z_k \leqslant \left(\sum y_k^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r} \left(\sum z_k^r\right)^{1/r}$$

المعروفة بمتراجحة هولدر Holder . الحالة الخاصة عندما $r = 2$:

$$\sum y_k z_k \leqslant \left(\sum y_k^2\right)^{1/2} \left(\sum z_k^2\right)^{1/2}$$

تعرف باسم متراجحة كوشي Cauchy .

يمكن أن نستنتج متراجحة منكاوسكي Minkowski (بند ٤) من متراجحة كوشي كالتالي:

لنفترض مرة أخرى أن $\Sigma q_k = 1$ ، فإن:

$$\begin{aligned} S = \sum q_k(a_k + b_k)^2 &= \sum q_k a_k(a_k + b_k) + \sum q_k b_k(a_k + b_k) \\ &= \sum (q_k^{1/2} a_k) q_k^{1/2}(a_k + b_k) \\ &\quad + \sum (q_k^{1/2} b_k) q_k^{1/2}(a_k + b_k) \end{aligned}$$

بتطبيق متراجحة كوشي لكل مجموع في الجهة اليمنى نجد أن:

$$\begin{aligned} S &\leqslant \left\{\sum q_k a_k^2 \sum q_k(a_k + b_k)^2\right\}^{1/2} + \left\{\sum q_k b_k^2 \sum q_k(a_k + b_k)^2\right\}^{1/2} \\ &= \left\{\sum q_k(a_k + b_k)^2\right\}^{1/2}\left[\left\{\sum q_k a_k^2\right\}^{1/2} + \left\{\sum q_k b_k^2\right\}^{1/2}\right] \end{aligned}$$

لذا

$$\left\{\sum q_k(a_k + b_k)^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum q_k a_k^2\right\}^{1/2} + \left\{\sum q_k b_k^2\right\}^{1/2}$$

الآن خذ $q_k = \frac{1}{n}$ لتصبح المتراجحة السابقة

$$\left\{\sum (a_k + b_k)^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum a_k^2\right\}^{1/2} + \left\{\sum b_k^2\right\}^{1/2}$$

في الإمكـان بطبيعـة الحـال إثبات هذه المتراجحة بطريقة مباشـرة. نفس الإثبات السابق مع تغيير طفيف باستخدام متراجحة هولدر بدلاً من كوشي يبين لنا أنه إذا كان $r > 1$ فإن:

$$\{\sum(a_k + b_k + \ldots)^r\}^{1/r} \leqslant \{\sum a_k^r\}^{1/r} + \{\sum b_k^r\}^{1/r} + \ldots$$

وهذه هي الصيغة العامه لمتراجحة منكاوسكي .

٢٤ - الدوال القابلة للتفاضل من جميع الرتب
Infinitely Differentiable Functions

الآن نعتبر الدوال التي بالإمكان مفاضلتها أكثر من مرة أو حتى عدد لانهائي من المرات . يوجد تعميم لنظرية القيمة المتوسطة لمثل تلك الدوال يعرف باسم نظرية تيلر Taylor مع باقي سوف لانخوض في الدواعي لاعتبار هذه الصيغة ولن نحاول أن نحصل عليها تحت أعم الافتراضات الممكنة . على كل حال سوف نحصل على الصيغة بإحدى الأشكال التي يكون فيها الباقي أجدى نفعاً .

لنفترض أن f دالة نطاقها يحوى الفترة $[a, x]$ وأن $f^{(n)}$ موجودة ومستمرة أو على الأقل بالإمكان مكاملتها لنحصل على $f^{(n-1)}$ $(n \geqslant 1)$. لنبدأ من :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) - \int_a^x f'(t)d(x - t)$$

ونكامل بالتجزئة (إذا كانت $n \geqslant 2$) لنحصل على :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \int_a^x (x - t)f''(t)dt$$

بتكرار هذه العملية نحصل أخيراً على :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2} f''(a) + \ldots + \frac{(x - a)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{1}{(n - 1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1}dt$$

لتوضيح إحدى طرق استعمال نظرية تيلر سوف نثبت النظرية التالية : لنفرض أن f دالة معرفة على فترة ما $[x_0, \infty)$ وأن f'' مستمرة وأن $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to x_0} f''(x) = 0$ فإننا نحصل على $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.

لإثبـات ذلك نعتبر نظرية تيلر بحيث يكون الباقي من الرتبة الثانية ونصعها الصيغة :

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(x)}{x - a} + \frac{1}{x - a}\int_a^x (x - t)f''(t)dt, \quad x > a$$

لتكن x_0 كبيرة لدرجة أن $|f(t)| < \epsilon$ لكل $t > x_0$ و $|f''(t)| < \epsilon$ لكل $t > x_0$. بالتالي إذا كان $a > x$ فإن :

$$|f'(a)| \leqslant \frac{2t}{x - a} + \frac{\varepsilon}{x - a}\int_a^x (x - t)dt$$

$$= \frac{2\epsilon}{x - a} + \frac{\epsilon(x - a)}{2} = \epsilon\left(\frac{2}{x - a} + \frac{x - a}{2}\right)$$

هنـا x اختيارية طالمـا أن $x > a$، لتكن $x = a + 2$ (السبب لهذا الاختيار يكمن في أن الكمية $2/(x - a) + (x - a)/2$ تكـون أصغـر ما يمكن عنـدمـا $x = a + 2$). بهذا الخيار تصبـح المـتراجحـة السـابقة $a > x_0$, $|f'(a)| \leqslant 2\epsilon$ وهذا يعني أن $f'(a) \to 0$ عندما $a \to \infty$.

بعض التغييرات الطفيفة في الإثبات تعطي نتائج أقوى نوعاً ما[٥٣]. على سبيل المثـال لاحـاجـة لافـتراض أن $f(x) \to 0$، فيكفي أن تكـون $f(x)$ محدودة طالما $f''(x) \to 0$. لإثبـات ذلك نفترض أن $|f(x)| \leqslant M$ ونضع $\epsilon(x) = \max\limits_{t \geqslant x}|f''(t)|$. من الواضح أن ϵ دالة غير تزايدية وأن $\lim\limits_{x \to \varepsilon} \epsilon(x) = 0$. الآن

$$|f'(a)| \leqslant \frac{2M}{x - a} + \frac{1}{x - a}\int_a^x (x - t)\epsilon(t)dt$$

$$\leqslant \frac{2M}{x - a} + \frac{\epsilon(a)}{2}(x - a)$$

واختر x بحيث $x - a = \{\epsilon(a)\}^{-1/2}$ لتحصل على

$$|f'(a)| \leqslant 2M\{\epsilon(a)\}^{1/2} + 1/2\{\epsilon(a)\}^{1/2}$$

ولذا فإن $f'(a) \to 0$ مرة أخرى.

من المغري أن ندع $n \to \infty$ في نظرية تيلر ونحصل على سلسلة لانهائية تسمى سلسلة تيلر للدالـة $f(x)$. إذا كان $R_n(x) \to 0$ (لقيمـة معينة لـ x) فالسلسلة التي نحصل عليها ستكون متقاربة وفي الحقيقة ستتقارب إلى $f(x)$. على كل حال يجب أن لانفترض أن هذا مايحدث دائمًا إذا كان للدالة f تفاضلات بجميع الرتب على الرغم من أنه يتحقق لعدة دوال بسيطة تواجهنا في حساب التفاضل والتكامل.

في المقام الأول، سلسلة تيلر ربما تكون متباعدة، في المقام الثاني، ربما تكون متقاربة لكن للمجموع الخاطىء. سوف نعطي أمثلة لكلا الاحتمالين(٥٤).

من الـطبيعي أن سلسلة تيلر ليس بالضرورة أن تكون متقاربة في كل النطاق الـذى تكون فيه الدالة أصلية قابلة للتفاضل بجميع الرتب. على سبيل المثال، الدالة $f(x) = 1/(1 + x^2)$ قابلة للتفاضل بجميع الرتب في كل R_1 لكن سلسلة تيلر لها (التي مركزها عند الصفر) متقاربة فقط لكل $|x| < 1$.

أشياء أسـوأ من ذلـك ممكن أن تحدث. سوف نعـطي مثالاً لدالة بحيث سلسلتهـا التيلرية تكـون متباعدة في كل مكان ماعدا بطبيعة الحال عند النقطة a نفسهـا. لنعتـبر الـدالـة f المعـرفـة بالسلسلة $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos b_n x$ حيث a_n أعـداد موجبـة صغـيرة و b_n أعـداد موجبـة صحيحة تؤول إلى ∞ وأخيراً $\Sigma\, a_n b_n^k$ متقاربة لكـل عدد صحيح موجب k (مثـلاً $a_n = e^{-n}$ و $b_n = n^2$). بما أن السلسـلات التي نحصـل عليهـا عن طريق التفـاضـل حداً حداً جميعهـا متقاربة بانتظام فإن f قابلة للتفـاضـل بجميع الـرتب. من جهـة أخـرى لننشـر f بواسـطة سلسلة تيلر حول الصفـر. في هذه الحـالـة علينـا فقط أن نعتبر الحدود زوجية الرتبة لأن التفاضلات فردية الرتبة للجيب تساوى صفراً عند الصفر. القيمة المطلقة للحد من سلسلة تيلر الذى يحوى $f^{(2k)}$ هي :

$$\frac{x^{2k}|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} = \frac{x^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n^{2k}}{(2k)!}$$

الآن مجموع السلسلة أعلاه يتجاوز قيمة أي حد من حدودها. إذا أخذنا المثال المقترح $(a_n = e^{-n}\,,\, b_n = n^2)$ نحصـل (لأن $(2k)! < (2k)^{2k}$) على :

$$\frac{x^{2k}|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} > \frac{x^{2k} a_n b_n^{2k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2 x}{2k}\right)^{2k} e^{-n}$$

حيث n أي قيمة نرغبها. لتكن x نقطة معطاة وخذ $n = 2k$ ، فإن:

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{2}n^2x}}{k}\right)^{2k} e^{-n} = \left(\frac{2kx}{e}\right)^{2k}$$

طالما أن $x \neq 0$ فإنه إذا كانت k كبيرة بقدر كافٍ نحصل على $2kx/e > 1$ لذلك حدود سلسلة تيلر لايمكن أن تؤول إلى الصفر. لذا فهي بالتأكيد متباعدة لكل x عدا الصفر.

من الممكن أن نثبت(٥٥) أنه إذا كانت $\{M_k\}$ أي متتالية من الأعداد فإنه توجد دالة f قابلة للتفاضل بجميع الرتب بحيث $f^{(k)}(0) = M_k$ لكل k . هذا يبين أن هذا النوع من الدوال التي سلاسلها التيلرية حول الصفر متباعدة (فيما عدا عند الصفر) لابد وأن تكون موجودة بشكل عام.

من الممكن إثبات، عن طريق بناء أكثر تعقيداً، أنه توجد دوال قابلة للتفاضل بجميع الرتب سلاسلها التيلرية متباعدة مهما كان اختيار النقطة لتكون المركز(٥٦).

لنعتبر الدالة المعرفه بـ

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0$$

من الممكن إثبات أن $f^{(k)}(0) = 0$ لكل k لذا جميع حدود سلسلة تيلر لـ f حول الصفر تساوى صفراً، ولذا بالتأكيد تتقارب إلى المجموع الخاطىء. من الواضح أن $f^{(k)}(x)$ لها الصيغة $R(x)e^{-1/x^2}$ لكل $x \neq 0$ حيث R دالة قياسية. الآن $x^{-n}e^{-1/x^2} \to 0$ عندما $x \to 0$ لكل عدد صحيح n (هذا يكافىء الحقيقة المألوفة أنه $x^n e^{-x^2} \to 0$ عندما $x \to \infty$) ولذا $f^{(k)}(x) \to 0$ عندما $x \to 0$. هذا بواسطة تمرين (٢١-١١) يقتضي أن $f^{(k)}(0) = 0$ أيضا. نستطيع بصورة مباشرة أن نبين $f^{(k)}(0) = \lim_{x \to 0} x^{-1} f^{(k-1)}(x) = 0$.

ليس من الصعب أن نثبت، عن طريق تقدير الباقي بصورة مباشر، أن سلسلة تيلر لدوال مألوفة مثل دالة الجيب والدالة الأسية تكون متقاربة في كل مكان للدوال الأصلية. بطريقة مشابهة، سلسلة تيلر للدالة $(1 + x)^p$ حول $x = 0$ لأي عدد حقيقي p تتقارب إلى القيمة الصحيحة لكل $|x| < 1$. بما أن سلسلة تيلر هي

نفسها السلسلة التي نحصل عليها من نشر $(1 + x)^p$ بنظرية ذات الحدين فإننا بذلك نحصل على إثبات لهذه النظرية لقوى سالبة أو كسرية.

الـدالـة التي سلسلتها التيلرية حول a تتقارب إليها (أي إلى الدالة) في جوار حول a تسمى تحليلية Analytic عنـد a . على النقيض من الأمثلة السـابقة سنثبت نظرية ملفتــة للنــظر (تسمى نظرية برنستـاين Bernstein) : إذا كانت f وجميع تفـاضلاتها غير سالبة في فترة. ما I فإن f تحليلية في هذه الفترة. (على سبيل المثال $f(x) = e^x$). من المناسب أن نكتب الباقي R_n على الصيغة

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^{x-a} f^{(n)}(u+a)(x-u-a)^n du$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n)}((x-a)t+a)(1-t)^n dt$$

على افــتراض أن a و x يفــعــان في الــفــترة المــعــنــية I وأن $x > a$. إذا كان $x < b$ و b في I فإننا نحصل على:

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n)}((b-a)t+a)(1-t)^n dt$$

وذلك لأن $f^{(n)}$ دالة غير تناقصية. أي أن

$$R_n(x) \leqslant \frac{(x-a)^{n-1}}{(b-a)^{n-1}} \cdot R_n(b)$$

بما أن جميع حدود سلسلة تيلر غير سالبـة فإننـا نحصـل أيضـا على $f(b) \geqslant R_n(b)$. بالرجوع إلى المتراجحتين الأخيرتين نجد أن:

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n+1} f(b)$$

ولأن $x - a < b - a$ فإن هذه المتراجحة تجعل $R_n(x) \to 0$.

في الحقيقة من الممكن أن نستبدل فرضية أن جميع التفاضلات موجبة بغرض أن جميع الفروق:

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x + nh)$$

لأنـه بالإمكان أن الدالة التي جميع فروقها موجبة تكون بصورة آلية قابلة للتفاضل بجميع الرتب[٥٧] . (قد تكلمنا عن الخطوة الاولى في هذا الصدد في 23 § عندما بينا أن للدالة، التي فروقها من الرتبة الثانية موجبة، تفاضل من الجهة اليمنى وآخر من الجهة اليسرى).

بالـرغم من أنـه من الممكن أن تكون سلسلة تيلر، للدالة غير التحليلية، متبـاعدة حول كل نقطة من فترة إلاّ أن الظاهرة التي تحدثنا عنها آنفاً وهي تقارب سلسلة تيلر إلى المجموع الخاطىء لايمكن أن تحدث على جميع الفترة. في الحقيقة بإمكاننا أن نثبت أنه إذا كان نصف قطر تقارب سلسلة تيلر، لدالة حول كل نقطة من فترة، موجباً فإنه لابد وأن توجد فترة جزئية حيث تكون الدالة تحليلية هناك. تكـرار تطبيق هذه الحقيقـة يقـود إلى استنتاج أن (تحت نفس الفرضيات السابقة) مجموعة النقاط التي يخفق نشـر تيلر حولها تكون مخلخلة على الأكثر.

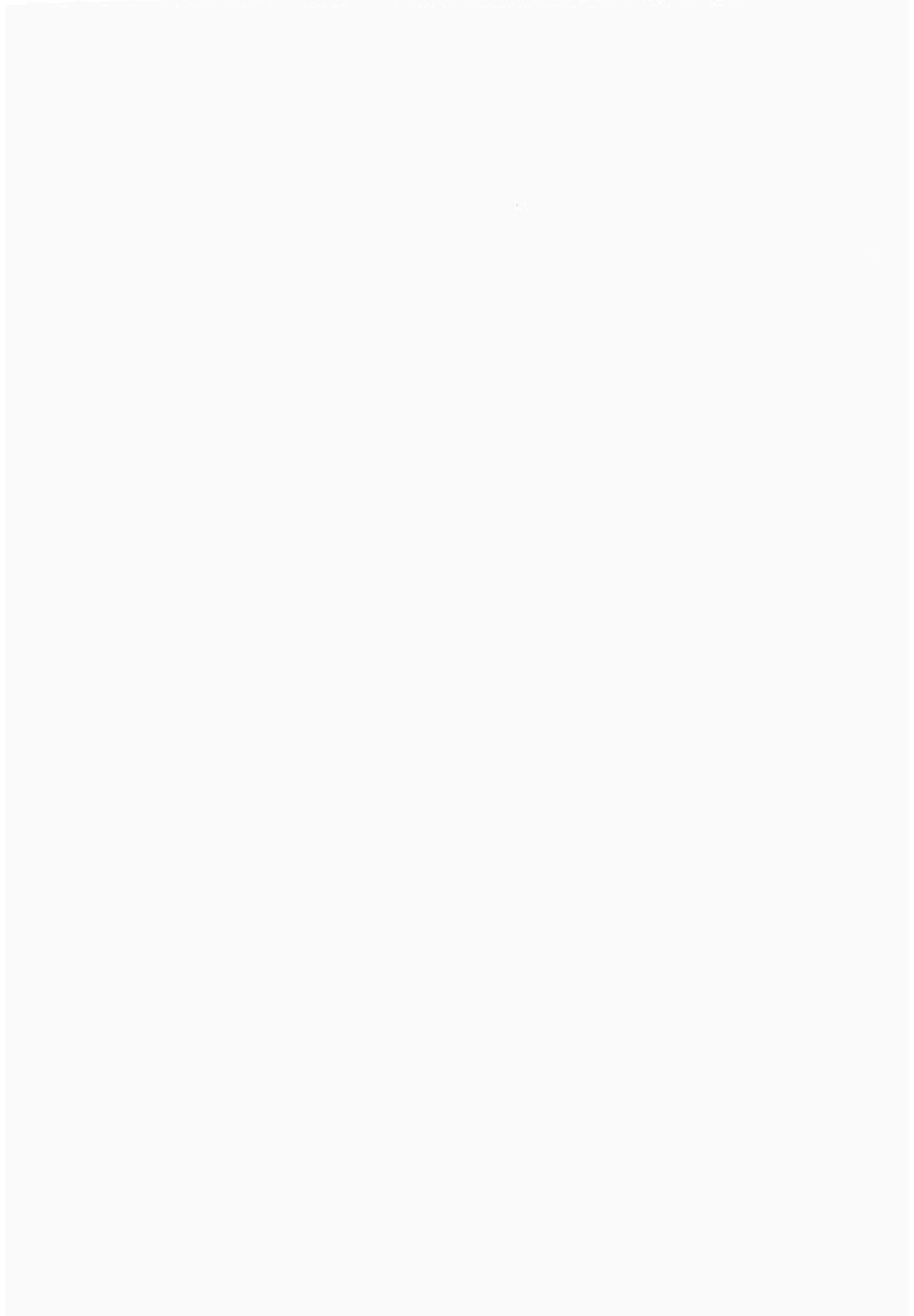
الإثبـات يعتمد على تطبيق بسيط لنظرية بير Baire . لتكون $p(a)$ ترمز إلى نصف قطر التقارب لسلسلة تيلر للدالة f حول النقطة a . إذن بتطبيق الصيغة المعتادة نحصل على

$$1/p(a)(a) = \lim\sup_{n\to\infty} |f^{(n)}(a)/n!|^{1/n}$$

بما أن $1/p(a)$ محدود لكـل a في الـفـترة المـعـنية، فإنـه لكـل a الـكـمية $\mu(a) = \sup_n |f^{(n)}(a)/n!|^{1/n}$ محدودة. اتحـاد المـجمـوعـات E_k من النقـاط a حيث $u(a) < k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ يطابق الفـترة المـذكـورة وبـالتالي فإن نظرية بير ترشدنا إلى أنـه لايمـكن أن تكـون، جميعهـا مخلخلة. لذا توجـد فترة جزئية حيث $|f^{(n)}(a)/n!|^{1/n} \leqslant k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ متحقق أولاً في مجموعة كثيفة ومن ثم في كل الفترة

نتيجـة لاستمـرارية $f^{(n)}$. في هذه الفترة تكون f تحليلية لأن المتراجحة الأخيرة تبين أن الباقي في سلسلة تيلر حول a يؤول إلى الصفر لكل النقاط x حيث $|x - a| < k$.

الآن من الطبيعي أن يثار الاستفسار عما يحدث عندما يكون p(a) ليس فقط موجباً بل بعيداً عن الصفر: أي أنه $p(a) \geqslant \delta > 0$ لكل a في فترة ما. في هذه الحالة من الممكن إثبات أن هذا الشـرط يجعل f تحليلية على جميع الفترة[٥٨].



حـواش

(١) لقد حسبت π إلى أكثر من 10^5 خانة عشـرية: راجع

D. Shanks and J.W. Wrench Jr., Calculation of π to 100,000 decimals, *Math. of Computation* **16** (1962), 76-99.

وكـذلـك فقـد حسب J. Gilloud وآخـرون معـه π إلى نصف مليون من الخانات العشـرية ولكن نتائجهم لم تطبع بعد.

(١ أ) يوجد براهين أخرى في المراجع التالية:

M. Reichbach, Une simple demonstration du theoreme de Cantor-Bernstein, *Colloquium Math.* **3** (1955), 163;
M.S. Hellmann, A short proof of an equivalent form of the Schroeder-Bernstein theorem, *Amer. Math. Monthly* **68** (1961), 770;
M.F. Smiley, Algebra of Matrices, Allyn and Bacon, Boston, 1965, pp. 235-236;
R.H. Cox, A proof of the Schroeder-Bernstein Theorem, *Amer. Math. Monthly* **75** (1968), 508.

(٢) راجع مثـلاً

C. Kuratowski, *Topologie*, Vol 2, *Monografie Matematyczne*, Vol. 21, 2nd ed., Warsaw, 1952, p. 85.

(٣) البرهان مقترح من W.C. Fox و R.R. Goldberg .

(٤) راجـع مثــلاً

M.E. Munroe, *Introduction to measure and integration*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953, p. 30.

(٥) جميع الطرق لإعطاء مجموع لسلسة لانهائية غير طريقة التقارب تسمى طرق أو أساليب قابلية الجمع (Summability) . راجع الكتب التالية :

O. Szasz, *Introduction to the theory of divergent series*, Hafner, New York, 1948;
G.H. Hardy, Divergent series, Oxford, 1949;
K. Zeller, *Theorie der limitie-rungsverfahren, Ergebnisse der Mathematik*, new series, no. 15, Springer, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1958.

(٦) راجع مثــلاً :

H. Hahn, *Reelle Funktionen,* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932, p. 115.

(٧) E. Corominas and F. Sunyer Balaguer, Condiciones para que una funcion infinitamente derivable sea un polinomio, *Revista Mat. Hisp., Amer.* (4) **14** (1954), 26-43.

يوجد في هذا البحث العديد من التعميمات للنظرية .

(٨) على سبيل المثال، راجــع :

A. Denjoy, Sur les fonctions derivees sommables, *Bull. Soc. Math. France* **43** (1915), 161-248.

(٩) S. Banach, Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktion enmengen, *Studia Math.* **3** (1931), 174-180)

(١٠) لقد أنشىء أبسط مثال في البحث التالي :

A.P. Morse, A continuous function with no unilateral derivatives, *Trans. Amer. Math. Soc.* **44** (1938), 496-507.

(١١) S. Saks, On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, *Fund. Math.* **19** (1932), 211-219.

(١١ أ) راجع كذلــك:

G.J.Minty, On the nation of "function", *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 188-189.

(١٢) راجع خاصة الكتابين التاليين:

J.B. Rosser, *Logic for Mathematicians*, McGraw-Hill, New York, 1953, pp. 366 ff.
K.K. Menger, *Calculus, a modern approach*, Ginn, Boston, 1955.

(١٣) G.H. Hardy, A formula for the prime-factors of any number, *Messenger of Math.* **35** (1906), 145-146.

(١٤) W. Sierpinski, Sur un exemple effectif d'une fonction non representable analytiquement, *Fund. Math.* **5** (1924), 87-91.

(١٥) H.Lebesque, *Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives*, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris, 1928, p. 97.

(١٥ أ) H. Fast, Une remarque sur la propriete de Weierstrass, *Coloq. Math.* **7** (1959), 75-77.

(١٥ ب) الجملة الأخيرة نتيجة لتعريفنا للاتصال لأن الخاصية هذه تتطلب أن تكون الصورة العكسية لكل فترة مفتوحة، مفتوحة (وهذا يعني أن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة تكون مفتوحة) لمعالجة أعمق راجع:

J.B. Diaz, Discussion and extension of a theorem of Tricomi concerning functions which assume all intermediate values, *J. Math. Mech.* **18** (1968/69), 617-628.
وكذلك مراجعة هذا البحث في *Math. Reviews* **39** # 370 .

(١٥ جـ) لايوجد تحويل متصل على فترة بحيث يوجد معكوسان فقط لكل صورة . راجـــع :

O.G. Harrold, the non-existence of a certain type of continuous transformation, *Duke Math. J.* **5** (1939), 789-793.

ومن أجل التعميات راجـــع :

J.H. Roberts, Two-to-one Transformations, *Duke Math. J.* **6** (1940), 256-262.
P. Civin, Two-to-one mappings of manifolds, *Duke Math. J* **10** (1943), 49-57.

(١٥ د) D.C. Gillespie, A property of continuity, *Bull. Amer. Math. Soc.* **28** (1922), 245-250.

(١٥ هـ) في البحث السابق نجد قانونا لهذه الدوال وهو كالتالي :

$$f(x) = \pi x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

حيـــث $0 < x \leqslant 1$

(١٥ و) يوجد برهان آخر في البحث التالي :

J.B. Diaz and F.T. Metcalf, A continuous periodic function has every chord twice, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 833-835.

من أجل التعميات إلى الدوال الدورية تقريبا (almost periodic) ودوال أخرى راجـــع :

J.C. Oxtoby, Horizontal chard theorems, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 468-475.

(١٦) تعزى هذه النظرية إلى P. Levy.

P. Levy, Sur une generalisation du theoreme de Rolle, *C.R. Acad. Sci. Paris* **198** (1934), 424-425.

ولكن أعيد اكتشافها من قبل آخرين . يوجد تعميات في :

H. Hopf, Über die Sehnen ebener Kontinen und die Schliefen geschlossener Wege, *Comment. Math. Helv.* **9** (1937), 303-319.

يوجد في بحث Hopf مناقشة لأطوال الأوتار الأفقية لدالة معطاة وكذلك في بحث Oxtoby المذكور في (١٥ و) والبحث:

R.J. Levit, The finite difference extension of Rolle's theorem, *Amer. Math. Monthly* **70** (1963), 26-30.

للمزيد من المعلومات والتطبيقات راجــع:

J.T. Rosenbaum, Some consequences of the universal chord theorem, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 509-513.

كذلك يعطى Rosenbaum تفسيراً حياً للنظرية:

How to build a picnic table for use on a mountain range of known period, *Notices Amer. Math. Soc.* **16** (1969), 94.

وهـــــذا تطبيق آخــر يعــزي إلى Oxtoby : إذا كانــت f متــصــلة و $f(x + y) = g(f(x), y)$ لجميع قيم x و y فإن f إما دالة مطردة فعلية أو دالة ثابتة (هذه هي مســألــة E2246 الــوارده في *Amer. Math. Montly* **78** (1971), 676-677 إذا لم تكن f مطردة فعلية فإن $f(x_0 + h) = f(x_0)$ لقيمة معينة x_0 وعدد موجب h . في هذه الحالة نجد أن

$$f(x + h) = f((x_0 + h) + (x - x_0) = g(f(x_0 + h), x - x_0)$$
$$= g(f(x_0), x - x_0) = f(x_0 + (x' - x_0)) = f(x).$$

وبـما أنـه يوجـد للدالةf وتر أفقي قصير اختياري (نظرية الوتر العامة) فإن للدالة f دورات قصــيرة اختيارية ولذا فهي دالة ثابتة. كذلك يلاحظ Oxtoby أنه إذا كانت f متصلة وإما مطردة فعلية أو ثابتة فإنه يوجد دالة g بحيث $f(x + y) = g(f(x), y)$.

(١٧) راجع Hopf في الملاحظة (١٦):

(١٨) من أجل المزيد من الإيضاح حول هذه النظرية ونظريات أخرى راجع

A.W. Tucker, Some topological properties of disk and sphere, *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress 1945*, University of Toronto Press, 1946, pp. 285-309.

(١٩) J.G. Brennan, Aproposity of a plane convex region, *Math. Gaz.* **42** (1958), 301-302;
A.C. Zitronenbaum, Bisecting an area and its boundary, *Math. Gaz.* **43** (1959), 130-131.

(٢٠) من أجل البرهان والمراجع والتعميات راجع .

A.H. Stone and J.W. Tuokey, Genralized "sandwich" theorems, *Duke Math. J.* **9** (1942), 356-359.

(٢١) للمزيد حول هذه النظرية والتي تليها راجـــع :

G. Polya and G. Szegi, *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis,* Springer, Berlin, 1925, Vol. 1, pp. 63, 225; Problems II 126, 127.

(٢٢) يوجد مناقشة لمفهوم المنحنى المتصل في :

G.T. Whyburn, What is a curve?, *Amer. Math. Monthly* **49** (1942), 493-497.
J.W.T. Youngs, Curves and surfaces, *ibid.* **51** (1944), 1-11.

(٢٣) W. Hurewicz, Über Dimensionserhohender Stetige Abbildungen, *J. Reine Angew. Math.* **169** (1933), 71-78.

(٢٤) I.J. Schoenberg, On the peano curve of Lebesque, *Bull. Amer. Math. Soc.* **44** (1938), 519.

(٢٥) للتعميات راجع :

L. Lorch, Derivatives of infinite order, *Pacific J. Math.* **3** (1953), 773-778.

(٢٦) راجع كتاب Polya-Szegö المذكور في ملاحظة (٢١)

Vol. 1, pp. 30, 185, problem I 165:

(٢٧) انظر على سبيل المثال:

C. de la Vallée Poussin, Integrale de Lebesque, fonctions d'ensemble, classes de Baire, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris, 1934, pp. 127 ff.

(٢٧ أ) لبرهان بسيط أنظر

F.W. Carroll, Separately continuous functions are Baire functions, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 175.

(٢٨). النظرية التي تقول بإمكانية التقريب المنتظم لدالة متصلة بواسطة كثيرة حدود تسمى نظرية فيرشتراس (Weierstrass approximation theorem) البرهان المعطى هنا يرجع إلى E. Landau .

(٢٩) المطلوب هنا وجود قاعدة هامل (Hamel Basis) للأعداد الحقيقية راجع:

H. Hahn and A. Rosenthal, *Set functions,* University of New Mexico Press, Albuquerque, 1948, pp. 100 ff.

يوجد دالة خطية غير متصلة في:

G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G., Polya, *Inequalities,* Cambridge University Press, 1934, p. 96.

بحث هامل الاصلي مشار اليه في الملاحظه (٣٢). راجع كذلك:

G.S. Young, The linear functional equation, *Amer. Math. Monthly* **65** (1958), 37-38.

يوجد مراجع وملاحظات تاريخية في:

J.W. Green and W. Gustin, Quasi-convex sets, *Canadian J. Math.* **2** (1950), 489-507.

(٣٠) يمكن الرجوع لهذ البرهان وبعض التعميمات في:

H. Kestelman, On the functional equation f(x + y) − f(x) + f(y), *Fund. Math.* **34** (1947), 144-147.

(٣١) A. Zygmund, *Trigonometrical series, Monografje Matemetyczne*, Vol. 5, Warsaw Lwow, 1935, pp. 133-134; *Trigonometric series*, Vol. I, Cambridge Universtity Press, 1959, p. 235.

لقد اكتشفت الخاصية من قبل H. Steinhaus . للمزيد من خصائص مجموعة كانتور ومجموعات مشابهة راجع :

T. Šalat, (*Math. Reviews* **24** # A2538); N.C. Bose Majumder (*Math. Reviews* **22** # 2971; **24** # A1706, A2537, A3444; 29 # 5215, 5732, 5733); *Amer. Math Monthly* **72** (1965), 725-729 (*Math. Reviews* **32** # 1295).

(٣٢) G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktional-gleichung f(x + y) = f(x) + f(y), *Math. Ann.* **60** (1905), 459-462.

(٣٣) M. Plancherel and G. Pólya, Sur les valeurs moyennes des fonctions reeles definies pour toutes les valeurs de la variable, comment. *Math. Helv.* **3** (1931), 114-121.

(٣٣ أ) راجع :

R.P. Agnew, Limits of integrals, *Duke Math. J.* **9** (1942), 10-19; Mean values and Frullani integral, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2**(1951), 237-241; Frullani integrals and variants of the Egoroff theorem on essentially uniform convergence, *Acad. Serbe. Sci. Puble. Inst. Math.* **6** (1954), 12-16.

(٣٣ ب) من أجل عرض كامل للنظريات حول المشتقات راجع :

A.M. Bruckner and J.L. Leonard, Derivatives, *Amer. Math. Monthly* **73, no. 4** (Slaught Papers, no. 11), 24-56.

(٣٤) M.Mikolas, Construction des familles de fonctions partout continues non derivables, *Acta Sci, Math. Szeged* **17** (1956), 49-62.

من أجل إنشاءات أبسط راجع :

J. McCarthy, An every where continuous nowhere differentiable function, *Amer. Math. Monthly* **60** (1953), 709;
T.H. Hildebrandt, A simple continuous function with a finite derivative at no point, *Amer. Math. Monthly* **40** (1933), 547-548.

(٣٥) W. Sierpiński: see S. Saks, Théorie de L'intégrale, *Monografje Matematyczne*, Vol. 2, Warsaw, 1933, pp. 167-168.

(٣٦) كتاب Saks المذكور في الملاحظة السابقة p. 177 . راجع كذلك:

D.E. Varberg, On absolutely continuous functions, *Amer. Math. Monthly* **72** (1965), 831-841; E.P. Woodruff, Derivatives of a function whose image is of Lebesque measure zero, *Notices Amer. Math. Soc.* **16** (1969), 666-667.

من أجل برهان أبسط لنتيجة أسهل راجع كتاب Pólya و Szegö المذكور في ملاحظة (٢١)

Vol. 1, pp. 63, 225; problem II 125.

(٣٧) E.W. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, Vol. 1, 3nd. ed. Cambridge University Press, 1927, p. 363.

(٣٨) T.M. Flett, A mean value theorem, *Math. Gaz.* **42** (1958), 38-39.

راجع كذلك:

S.G. Wayment, An integral mean value theorem, *Mat. Gaz.* **54** (1970), 300-301.

والمراجع المعطاة هناك:

J.B. Diaz and R. Výborný, On some mean value theorems of the differential calculus, *Bull. Austral. Math. Soc.* **5** (1971), 227-238.
S. Reich, Problem 5810, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 798.

(٣٩) يوجد معالجة لحالة خاصة في:

L.J. Paige, A note on indeterminate forms, *Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 189-190.

(٣٩ أ) راجع: A.P. Morse, Dini derivates of continuous functions, *Proc. Amer. Soc.* **5** (1954), 126-130.

(٤٠) من أجل المراجع حول الموضوع راجع

P. Erdös, Some remarks on set theory, *Ann. of Math.* **44** (1943), 643-646 (p. 646).

(٤١) A.N. Singh, On infinite derivatives, *Fund. Math.* **33** (1945), 106-107.

(٤٢) M.K. Fort, Tr., A theorem concerning functions discontinuous on a dense set, *Amer. Math. Monthly* **58** (1951), 408-410.

البرهان المبسط في الكتاب مقترح من قبل A.C. Segal .

يوجد برهان بسيط آخر في:

E.M. Beesley, A.P. Morse and D.C. Pfaff, Lip schitzian points, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 603-608.

(٤٣) من أجل عرض مبسط راجع

F. Riesz and B. Sz-Nagy, *Functional Analysis*, Ungar, New York, 1955, pp. 17 ff.

(٤٤) J.S. Lipiński, Sur la dérivée d'une fonction de sauts, *Colloq. Math.* **4** (1957), 197-205.

L.A. Rubel, Differentiability of monotonic functions, *Colloq. Math.* **10** (1963), 277-279.

(٤٥) من أجل إنشاء مبسط راجع:

R. Salem, On some singular monotonic functions which are strictly increasing, *Trans. Amer. Math. Soc.* **53** (1943), 427-439.

(٤٦) الإنشاء المعطى في الكتاب مأخوذ من:

S. Saks, (*Theory of the integral, Monografic Matematyczne*, Vol. **7**, Warsaw-Lwów, (1937), pp. 205-206).

نذكر هنا بعض الحقائق ذات العلاقة:

إذا كانت g متصلة ولها مشتقة (نهائية أو لا نهائية) في كل مكان ماعدا على مجموعة قابلة للعـد وهذه المشتقة غير سالبة في كل مكان تقريباً فإن g تكون غير تناقصية (راجع Saks المذكور سابقاً).

إذا كانت E مجموعة G_δ قابلة للعد فإنه يوجد دالة (ليست متصلة بالضرورة) مشتقتها تساوى ∞ + على E و 0 خارج E راجع :

G. Piranian, The derivative of a monotonic discontinuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 243-244.

(المجموعة تكون G_δ إذا أمكن تمثيلها كتقاطع مجموعة قابلة للعد من المجموعات المفتوحة. المجموعة المكونة من نقاط الأطراف للفترات المكملة لمجموعة كانتور هي G_δ بينما مجموعة الأعداد النسبية في R_1 ليست G_δ).

(٤٧) العرض يشبه عرض كتاب Riesz و Sz-Nagy المذكور آنفاً مع بعض التبسيط المعطى في الكتاب

H. Kestelman, *Modern theories of integration*, Oxford, (1937), pp. 199 ff.

لقد برهن Lebesque هذه النظرية كنتيجة لنظريته في التكامل. يوجد برهان قصير في :

D.G. Austin, A geometric Proof of the Lebesque differentiation theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 220-221.

(٤٨) هذا البرهان وبرهان النظرية التالية مثل براهين Riesz و Sz-Nagy . نظرية Fubini في التكامل نظرية أخرى.

(٤٩) P. Erdos, Some remarks on the measurability of certain sets, *Bull, Amer. Math. Soc.* **51** (1945), 728-731.

(٥٠) أعم نتيجة موجودة في :

A. Ostrowski, Zur Theorie der konvexen Funktionen, *Comment. Math. Helv.* **1** (1929), 157-159.

(٥١) العرض يتبع العرض الموجود في :

R.P. Boas and D.V. Widder, Functions with Positive differences, *Duke Math. J.* **7** (1949), 496-503.

(٥٢) من أجل المتراجحات هناراجع :

Hardy, Littlewood and Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, (1934), chapters 2 and 3.
E.F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

(٥٣) للمراجع والتعميات راجع :

Boas, Asymptonic relations for derivatives, *Duke Math. J.* **3** (1937), 637-646.

(٥٤) من أجل البحوث المتعلقة بالموضوع راجع :

H. Salzmann and K. Zeller, Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen, *Math. Z.* **62** (1955), 354-367.

(٥٥) راجع :

A. Rosenthal, On functions with infinitely many derivatives, *Proc. Amer. Math Soc.* **4** (1953), 600-602.
Salzmann and Zeller, Paper cited above. H. Mirkil, Differentiable functions, formal power series and moments, *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956), 650-652.

(٥٦) لبرهان نظرية بير راجع :

D. Morgenstern, Unendlich oft differenzierbare nicht-analytische Funktionen, *Math. Nachr.* **12** (1954), 74.

للحصول على إنشاء صريح راجع :

H. Cartan, Sur les classes de fonctions défeniés par des inégalités portant sur leurs dérivées successives, *Actualités Scientifiques et industrielles*, no. 867 (1949), pp. 20-22.

(٥٧) S. Bernstein راجع بحث Boas و Widder المذكور سابقا .

(٥٨) راجع بحث Salzmann و Zeller المذكور سابقا .

(٥٩) W.F. Osgood, Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung, *Monatsh. Math. Phys.* **9** (1898), 331-345, p. 344.



حلول التمارين

(١-١) مجرد إعادة صياغة التعريف .

(١-٢) (أ) كل حرف إما أن يكون حرفاً ساكناً أو حرف علة وجميع حروف العلة تظهر في الجملة "Real functions" .

(ب) $C(E)$ مكونه من جميع حروف العلة .

(جـ) $C(F)$ مكونة من الحروف الساكنة فقط (وليس جميع هذه الحروف) .

(د) $F \cap E = \{r,l,f,n,c,t,s\}$ لايحوى أياً من حروف العلة .

(٢-١) (أ) كل الأعداد التي أكبر أو تساوى 1 ، جميع الأعداد غير الموجبة ، 1 ، 0.

(ب)، (جـ)، (د)، (هـ) : نفس إجابة الفقرة (أ) .

(و) جميع الأعداد غير السالبة، جميع الأعداد غير الموجبه، 0 ، 0 .

(٢-٢) يوجد أكبر حد أدنى لكل مجموعة E غير خالية ومحدودة من أسفل ونرمز له بالرمز Inf E وهو يحقق الخصائص التالية. إذا كانت $x \in E$ فإن $x \geqslant \inf E$ وإذا كانت $A > \inf E$ فإنه يوجد $x \in E$ واحدة على الأقل

بحيث $x < A$. إذا افترضنا خاصية أصغر حد أعلى وكانت E مجموعة محدودة من أسفل، إجعل F مجموعة الأعداد x بحيث $-x \in E$. وبما أن $x > M$ يعني $-x < -M$ والمجموعة F محدودة من أعلى ولها أصغر حد أعلى B . إذاً $-B$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة E . لأنه إذا كانت $-x \leqslant B, x \in E$ فإن $x \geqslant -B$ ، وإذا كانت $-A < B, A > -B$ فإنه يوجد $x \in E$ بحيث $-x > -A$ أي أن $x < A$.

(٢-٣) $(-\infty) + \infty +$ يعني $\left(\frac{a}{0}\right) + \left(\frac{b}{0}\right)$ حيث $b < 0, a > 0$. ولكي نبقي على عمليات الحساب في هذه الحالة نجد أن المجموع يساوى $\frac{a+b}{0}$ وهذا قد يكون $+\infty$ أو $-\infty$ أو حتى غير معرف حسب ما إذا كانت $a + b > 0$ أو $a + b < 0$ أو $a + b = 0$. إذا كانت $0 = (+\infty)$. 0 فإن $\frac{x}{0} = +\infty$ حيث x أي عدد موجب . كذلك يستحيل إعطاء معنى للكمية $\frac{(+\infty)}{(+\infty)}$.

(٢-٤) إذا كانت $x \in E$ فإن كل حد أعلى للمجموعة E لايقل عن x وكل حد سفلي للمجموعة E لايزيد عن x . نفس الشيء يصح إذا بدلنا x بالرمز y حيث $y \in E$. إذا $y > x$ فإن $\sup E \geqslant y > x \geqslant \inf E$. ونفس الشيء يحدث إذا $y < x$.

(٣-١) خذ المجموعات E و F وأحذف من F كل عنصر مشترك مع E . إذا كانت المجموعة المتبقية (اسمها F_1) نهائية، عد F_1 ثم E . إذا لم تكن F_1 نهائية، استعمل الأعداد الصحيحة الفردية لترقيم F_1 والأعداد الصحيحة الزوجية لترقيم E .

(٣-٢) يمكن تسمية عناصر المجموعة E_k ، $e_{k,1}$ ، $e_{k,2}$ ..... $e_{k,n}$ أربط بالزوج (k, n) .

(٣-٣) الدالة الخطية $ax + b$ بعوامل صحيحة تعطي تناظراً أحادياً مع الأزواج (a, b) وكثيرة الحدود $ax^2 + bx + c$ تعطي تناظراً مع الأزواج (a, b, c) وهكذا.

(٣-٤) لو كانت الأعداد الحقيقية x في (a, b) قابلة للعد فإن الأعداد الحقيقية $x - a$ في $(0, b - a)$ تكون قابلة للعد كذلك الأعداد الحقيقية $\frac{x - a}{b - a}$ في $(0, 1)$ تكون قابلة للعد.

(٣-٥) إلانشاء المستخدم في الكتاب ينطبق بكامله لأنه العدد المنشأ لايحوى الرقم 3 .

(٣-٦) إذا كانت E نهائية بعد حذف x_1 فإنها ستبقى نهائية بعد إضافة x_1. إذا انتهت العملية بعد حذف $x_1, x_2, \ldots, x_k$ فسوف يبقى لدينا مجموعة نهائية وهذه المجموعة ستبقى نهائية بعد إضافة k من النقاط.

(٣-٧) اجعل F المجموعة E بعد حذف x_0. اختر مجموعة لانهائية قابلة للعد $\{x_1, x_2, \ldots\}$ من F ، أربط نقاط E المختلفة عن $x_0, x_1 \ldots$ مع نفسها (كنقاط من F)، وأربط x_0 بالنقطة x_1 والنقطة x_1 بالنقطة x_2 ... الخ.

(٣-٨) التناظر $x \longleftrightarrow \tan x$ يعطي تناظراً أحادياً بين الأعداد الحقيقية المحصور بين $-\pi/2$ و $\pi/2$ ومجموعة الأعداد الحقيقية بكاملها. بالإمكان إعطاء براهين هندسية.

(٣-٩) إذا كانت «مجموعة كل المجموعات» مجموعة ونسميها S فإن فئة المجموعات الجزئية في S تمثل مجموعة T لايمكن وضعها في تناظر أحادي مع أي مجموعة جزئية في S . ولكن المجموعات الجزئية في S هي

مجموعات مثل عناصر S ولذا فإن الطائفه T في تناظر أحادي مع مجموعة جزئية من S وهي T نفسها. هذا تناقص.

(٣-١٠) استخدم نظرية شـرودر - برنشتاين. فمن ناحية نستطيع أن نربط كل عدد حقيقي بمتتـالية من الأعداد الحقيقية وهي متتالية أرقام مفكوكة العشري. ومن ناحية أخرى، إذا كان لدينا متتالية من الأعداد الحقيقية فإننا نستطيع كتابة مفكوكاتها العشرية، واحداً تلو الأخر ومن ثم نأخذ الأرقام التي على قطر الصفوف الناتجة لنحصل على مفكوك عدد حقيقي. المتتاليات المختلفة تعطي أعداداً مختلفة وذلك لأن المفكوك العشري لاينتهي.

(٤-١) الخصـائص (١) و (٢) للمسافتين الجديدتين واضحة. لإثبات الخاصية (3)، سم الـنقــاط x، y، z كالآتي (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) على الترتيب، علينا أن نثبت الآتي:

$$|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$$

وأن

$$\max(|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|) \leq \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) + \max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|).$$

المتراجحة الأولى تأتي من $|x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$ (وكذلك إذا بدلنا x بـ y). المتراجحة الثانية تنتج من نفس المتراجحات السابقة لأن

$$\left.\begin{matrix}|x_1 = x_3|\\ |y_1 - y_3|\end{matrix}\right\} \leq \left\{\begin{matrix}|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|\\ |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|\end{matrix}\right.$$

$$\leq \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) + \max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|).$$

أطوال أضلاع المثلث الذى رؤوسه $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ هي 1 ، 1 ، 2 ، حسب المسافه الأولى الجديدة. أما المثلث الذى رؤوسه $(0, 0)$ ، $(1, -1)$ ، $(1, 1)$ فأطوال الأضلاع هي 1 ، 1 ، 2 حسب المسافة الثانية الجديدة. المحل الهندسي للعلاقة $d(x, 0) = 1$ في المسافة الأولى الجديدة يتألف من النقاط (x, y) حيث $|x| + |y| = 1$ أي المربع الذى رؤوسه $(\pm 1, 0)$ ، $(0, \pm 1)$. أمـا في المسـافـة الثـانية فالمحل الهندسي يساوى النقـاط (x, y) حيث $|x| = 1$ و $|y| \leqslant 1$ أو $|x| \leqslant 1$ و $|y| = 1$ وهـذا مربع رؤوسه عند النقاط $(\pm 1, \pm 1)$.

(٤-٢) جميع شـروط الفضاء المتري تبقى محققة.

(٤-٣) $d(x, x) = 0$ و $d(y, x) = d(x, y) = 1 > 0$ عنـدمـا $x \neq y$. إذا كانت $x = z$ فإن $0 = d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ وإذا كانـت $x \neq z$ فإن $1 = d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ لأن $x = y = z$ ممنوع.

(٥-١) جوار عنصر x في الفضاء C يتألف من جميع الدوال المتصلة y بحيث $|y(t) - x(t)| < r$ لجميع t في $[0, 1]$.

(٥-٢) إذا كانت $p = (m, n)$ نقـطة من الفضاء فإن جوار p يتألف من جميع النقاط باحداثيين صحيحين التي بعدها العادي عن p أقل من r . كل جوار يحوى عدداً نهائياً من النقاط وإذا كانت $r < 1$ فإنه يحوى مركزه فقط.

(٥-٣) الجـوارات التي قطرهـا أقل من 1 تحوى مراكزها فقط (تمرين ٥-٢) إذاً الجـوارات الكـافية الصِّغـر لأى نقطة من E لاتحوى نقاطاً في $C(E)$ ولذا فحدود E خالية.

(٥-٤) التعريف متناظر في E و C(E) .

(٥-٥) لتكن x نقطة حدية لـ B ولتكن N جوارا حول x . إذن N تحوى نقطة y من B على الأقـل وكذلك N تحوى جواراً حول y وهذا الجوار يحوى نقطة من E ونقطة من C(E) . إذن x نقطة حدية لـ E أي أن $x \in B$.
إذا كانت E مكـونـة من جميع النقـاط النسبية في R_1 فإن حدود E هي المجموعة R_1 وعليه فإن حدود حدود E مجموعة خالية .

(٥-٦) (أ) : حدود N مكون من النقاط التي تبعد المسافة r عن x .
(ب) : حدود N قد تكون خالية (تمرين ٥-٣) ولكن إذا احتوت نقاطاً فلابد أن تكون هذه النقاط على مسافة r من x . حيث إنه إذا كان بعد النقـطة $(y \in N)y$ عن x أقـل من r فسنجـد جواراً صغيراً لـ y بهذه الخـاصية وعليه فإن y نقطة داخلية . بطريقة مماثلة ، النقطة y والتي مسافتها عن x أكبر من r تكون نقطة داخلية من C(E) .

(٥-٧) إذا كانت $a < x < b$ ، وجـوار x فترة مثـل $(x - h, x + h)$ وإذا كانت $h < \min(x - a, b - x)$ فالجوار داخل (a, b) . إذاً x نقطة داخلية .
النقـاط الحـدية للفترة $[a, b]$ هي a و b وبما أنها تنتمي إلى $[a, b]$ أذن $[a, b]$ مغلقة .

(٥-٨) الفترة (a, b) غير مفتوحة وغير مغلقة في R_2 لأن داخلها مجموعة خالية ولكنها لاتحوى نقاطها الحدية a و b . كذلك $[a, b]$ مغلقة في R_2 لأن جميع نقاطها نقاط حدية .

(٥-٩) النقطة 0 ليست نقطة داخلية ، 1 نقطة حدية لاتنتمى إلى المجموعة .

(٥-١٠) جميع نقاط الفضاء داخلية وعليه فالفضاء مفتوح. حدود الفضاء مجموعة خالية ولذا فهي محتواة في الفضاء. إذاً الفضاء بكاملة مفتوح ومغلق. المجموعة الخالية تحوى داخلها (الخالي) وحدودها (الخالية).

(٥-١١) الفترات $(n, n + 1/2)$ تمثل المجموعات المطلوبة وكذلك اتحادات هذه المجموعات.

(٥-١٢) غير مفتوحة وغير مغلقة حيث إن الحدود هي R_1 بكاملها وداخلها مجموعة خالية.

(٥-١٣) أي جوار يكون مفتوحاً. الجوار المكون من نقاط الفضاء والتي تبعد عن 0 بمسافة أقل من $\sqrt{2}$ هو جوار مغلق لأن مجموعة حدوده خالية.

(٥-١٤) إذا كانت E أي مجموعة في هذا الفضاء فإن جوارات نقاط E والتي أنصاف أقطارها أقل من 1 تنتمي جميعها لـ E وعليه فإن E مفتوحة. من التمرين (٥-٣) نجد أن حدود E خالية وعليه فهي محتواة في E أي أن E مغلقة.

(٥-١٥) إذا $x \in G \supset E$ حيث G مفتوحة و x نقطة داخلية من G ولذا فهي نقطة داخلية من E لأن كل جوار حول x مكون من نقاط G فقط يكون داخل المجموعة E .

(٥-١٦) إذا كانت E مفتوحة و $x \in E$ فإنه يوجد جوار حول x مكون من نقاط E فقط ولذا فليست جميع جوارات x تحوى نقاطاً من E ونقاطاً من C(E). إذن E لاتحوى أياً من نقاطها الحدية. وبالعكس إذا لم تحوى E أيا من نقاطها الحدية وكانت $x \in E$ فإن

x ليست نقطة حدية ولذا يوجد جوار للنقطة x لا يتقاطع مع $C(E)$. إذن E مجموعة مفتوحة.

(٥-١٧) المجموعة E مفتوحه إذا وإذا فقط لم تحو أياً من نقاطها الحدية أي إذا كانت جميع نقاط الحدود في $C(E)$. هذا بدوره يعني أن E مفتوحة إذا وإذا فقط كانت $C(E)$ تحوى جميع نقاط حدودها $C(E)$ (لأن حدود E هي حدود $C(E)$) أي إذا كانت $C(E)$ مغلقة.

(٥-١٨) هذا صياغة أخرى للتمرين (٥-١٧) بدل E و $C(E)$.

(٥-١٩) إفرض أن E تحوي جميع نقاط حدودها وأن x نقطة نهاية لـ E . في هذه الحالة إما $x \in E$ أو $x \in C(E)$. في الحالة الثانية نجد أن كل جوار حول x يتقاطع مع E (لأن x نقطة نهاية لـ E) ويتقاطع مع $C(E)$ أيضا (لأن x في $C(E)$) . إذن x نقطة حدية لـ E إذا لم تكون في E . إذن E تحوى جميع نقاط نهاياتها إذا كانت تحوى جميع نقاطها الحدية. وبالعكس، لنفرض أن E تحوى جميع نقاط نهاياتها ولتكن y نقطة حدية لـ E . إذا كانت y نقطة نهاية لـ E فإنها في E بالفرضية. إذا لم تكن نقطة نهاية لـ E فإنه يوجد جوار حول y لايحوى أى نقاط من E ماعدا y نفسها، ولكن $y \in E$. إذاً E تحوى جميع نقاطها الحدية.

(٥-٢٠) لتكن x نقطة نهاية لـ E ولتكن N_1 جواراً حول x . من الفرض، N_1 تحوى نقطة y_1 من E بحيث $y_1 \neq x$. أي جوار N_2 حول x بنصف قطر أقل من $d(x, y_1)$ لايحوى النقطة y_1 ولكنه يحوى نقطة أخرى y_2 من E ، وهكذا.

(٥-٢١) افرض أن F مجموعة نقاط نهايات E ولتكن x نقطة نهاية لـ F . إذن كل جوار حول x يحوى نقاطاً من F أي أنه يحوى نقاطاً نهايات لـ E وعلية فهو يحوى جوارات جزئية تحتوى على نقاط من E . إذن x نقطة نهاية للمجموعة E وهذا يعني أن $x \in F$. أي أن F تحتوى جميع نقاط نهاياتها .

(٥-٢٢) (أ) و (جـ) : جميع نقاط الفترة [0, 1] ، (ب) : النقطة 0 .

(٥-٢٣) اجعل x نقطة نهاية لـ E . كل جوار حول x يحوى عدداً لا نهائياً من نقاط E (تمرين ٥-٢٠)، وحيث أن كل نقطة من هذه النقاط تنتمي إلى A أو إلى B فلابد أن تحوى A أو B عدد لانهائياً من هذه النقاط .

(٥-٢٤) إذا كانت مجموعة حدود E خالية فإنها أي E تكون مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت (تمرين ٥-١٦ ، تعريف المجموعة المغلقة) .

(٥-٢٥) علينا أن نبرهن في البداية أنه إذا كانت x تنتمي إلى إغلاق E ولا تنتمي إلى E نفسها فإنها نقطة حدية لـ E ، طبعاً نحن نعلم أنها نقطة نهاية لـ E . كل جوار حول x يحوى نقاطاً من E والنقطة x من C(E) . إذاً x نقطة حدية لـ E . اجعل F إغلاق E واكتب $F = E \cup H$ حيث H مجموعة نقاط نهايات E . نقطة النهاية y للمجموعة F إما أن تكون نقطة نهاية لـ E أو لـ H (تمرين ٥-٢٣) في الحالة الأولى، $y \in F$. في الحالة الثانية نجد أن $y \in H$ ومنه أن $y \in F$ لأن H مغلقة (تمرين ٥-٢١) .

(٥-٢٦) (أ) [0, 1] ، (ب) {0, 1, ½, ⅓, ...} ، (جـ) [0, 1] .

(٥-٢٧) من التمـرين (٥-٢٥) نجـد أن إغـلاق الجـوار N يسـاوى اتحـاد N وحدودها. الحدود هي مجموعة النقاط y بحيث $d(x, y) = r$.
هذا غير صحيح بشكل عام في الفضاءات المترية. فمثلاً خذ الفضاء المكون من $[0, \frac{1}{2}] \cup [1, \infty[$ بمسافة R_1 . اجعل N مجموعة النقاط التي تبعد عن 0 بأقل من 1 . إغلاق N هو المجموعة $[0, \frac{1}{2}]$ وليس مجموعة نقاط الفضاء التي لايزيد بعدها عن 0 بأكثر من 1 .

(٥-٢٨) افــرض أن إتحـاد n من المجمـوعـات المغلقـة يكـون مغلقـاً. لتكن F_1 ، F_2 ، ... ، ... ، F_{n+1} ، n + 1 من المجمـــوعـــات المغلقـة. إذاً $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_{n+1} = (F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n) \cup F_{n+1}$ اتحـاد مجمـوعتـين مغلقتين بطريقة مماثلة (أو عن طريق المكملات) نثبت أن تقاطع عدد منته من المجموعات المغلقة يكون مغلقاً.

(٥-٢٩) بالإمكان تعميم برهان أن تقاطع مجموعتين مغلقتين يكون مغلقاً.

(٥-٣٠) خذ مجموعات R_1 والتي يتكون كل منها من عدد نسبي واحد.

(٥-٣١) اتحاد المجموعات المفتوحة مفتوح: خذ نقطة x تنتمي إلى واحد من هذه المجموعة المفتوحة على الأقل. إذن يوجد جوار لـ x ينتمي إلى أحد هذه المجموعات المفتوحة (لأنها مفتوحة) وعليه فإن اتحاد المجموعات المفتوحة يكون مفتوحاً.
التقـاطـع النهائي لمجموعات مفتوحة يكون مفتوحاً: يكفي أن نبرهن ذلـك لمجمـوعتين مفتوحتين (ثم نستعمل الاستقراء). لتكن G_1, G_2 مفتـوحة $x \in G_1 \cap G_2$. يوجد جوارا حول x ينتمي إلى G_1 وجوار آخر ينتمي إلى G_2 . تقاطع هذين الجوارين يحتوى جواراً أصغر وهذا بدوره ينتمي إلى G_1 و G_2 وكذلك إلى تقاطعها.

تقاطع عدد لانهائي من المجموعات المفتوحة قد لايكون مفتوحاً: خذ الفترات $(1/n$ و $-1/n)$ في R_1. تقاطعها غير مفتوح لأنه مكون من النقطة 0 .

(٥-٣٢) إذا وجدت نقاط حدية لـ N_2 فإنها تنتمي لمجموعة النقاط y حيث $d(x, y) \leqslant r/_2$ وعليه فإن $N_2 \subset N_1$. إذا كان الفضاء مكوناً من الأعداد الصحيحة بمسافة R_1و $r = 1$ فإن $N_1 = N_2$ إذا كانت $x = 0$.

(٦-١) أي جوار في Ω يتألف من نقطة واحدة إذا كان نصف قطره أقل من 1 . إذاً مجموعات Ω والتي تحوى كل منها نقطة واحدة فقط ليست مخلخلة.

(٦-٢) اغلاق المجموعات غير المخلخله يملأ جواراً ما. إذا كانت المجموعة مغلقه أيضاً فإنها تتطابق مع إغلاقها ولذا فلا بد أن تحوى جواراً ما.

(٦-٣) إذا اعتبرنا R_1 مجموعة جزئية من R_2 فإن المجموعة R_1 مغلقة وبما أن كل نقطة من R_1 هي نقطة نهاية لـ R_1 إذن R_1 تامة. ولكن R_1 لاتحوى أي جوار من R_2 .

(٦-٤) يمكن نشر أي عدد في مجموعة كانتور ماعدا الطرفين في النظام الثلاثي بدون الحاجة للرقم 1 وبدون أن ينتهى المفكوك بسلسلة من الأصفار أو بسلسلة من الأرقام 2 . لنفرض أن أعداد مجموعة كانتور هذه هي $p_1, p_2, \ldots$ ونكون عدداً جديداً t خاناته في النظام الثلاثي t_n تساوى 0 أو 2 حسب ما إذا كانت الخانة النونية لـ p_n هي 2 أو 0 . بما أن t تختلف عن p_n في الخانه النونية أذن فالعدد t لايظهر في التعداد السابق. هذا الإنشاء لايصح إذا كانت الخانة النونية في p_n صفراً دائمًا (أو 2 دائمًا) لإحدى قيم n والقيم التي تليها. بالإمكان تفادى هذه الصعوبات وذلك بإعادة ترقيم التعداد السابق قبل البدء في إنشاء العدد الجديد t .

(٦-٥) النقاط التي إحداثياتها نسبية تكون مجموعة قابلة للعد وكثيفة في كل مكان من R_2 .

(٦-٦) عدد كثيرات الحدود لايقل عن عدد عواملها الثابتة .

(٦-٧) مجموعة الأعداد النسبية قابلة للعد، ومجموعة كثيرات الحدود الخطية بعوامل نسبية قابلة للعد كذلك وهكذا (راجع تمرين ٣-٣).

(٦-٨) إذا كانت P_n كثيرة حدود درجتها n فإننا نستطيع تقريب كل من عواملها بعدد نسبي إلى أقرب من $\epsilon/(n+1)$ ومن هذا نقرب كثيرة الحدود على $[0, 1]$ في حدود ϵ . (استعمل ٦-٧).

(٦-٩) المتتاليات المؤلفة من الرقمين $\{1, 0\}$ غير قابلة للعد. (نصف خانات المفكوك الثلاثي في التمرين ٦-٤).

(٦-١٠) 1 .

(٦-١١) اجعل f_x الدالة المعرفة كالتالى $f_x(t) = 0$ حيث $0 \leqslant t < x$ و $f_x(t) = 1$ حيث $x \leqslant t \leqslant 1$. مجموعة الدوال هذه غير قابلة للعد لأنه يوجد دالة من هذا النوع لكل x في $[0, 1]$. المسافة بين أي من هذه الدوال تساوى 1 . باقى البرهان مشابه للبرهان في حالة الفضاء m .

(٧-١) اجعل f دالة متصلة على مجموعة مغلقة ومحدودة E وافرض أن f غير محدودة. إذن يوجد نقطة x_1 بحيث $|f(x_1)| > 1$ ونقطة x_2 بحيث $|f(x_2)| > |f(x_1)| + 1 > 2$ وهكذا، بشكل عام $|f(x_n)| > n$. نظرية بولزانو - فيرشتراس تعطى نقطة نهاية x للمجموعة $\{x_1, x_2, \ldots\}$ و

$x \in E$ لأن E مغلقة و $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ لأن f متصلة. ولكن $\lim f(x_n)$ غير موجود لأن $|f(x_n)| > n$.

(٧-٢) مجموعة E تقع في مستطيل ما أضلاعه توازي محاور الإحداثيات قسم المستطيل إلى أرباع بمستقيمات تنصف كلاً من أضلاعه واستمر في العملية كما في حالة R_1 .

(٧-٣) إذا كانت x تنتمي إلى ثلاث فترات على الأقل ولتكن $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ، إختر الفترة التي طرفها الأيمن أكبر ما يمكن وكذلك الفترة التي طرفها الأيسر أصغر مايمكن. بما أن كل من الفترتين تحوى x إذن فهي تتقاطع وتغطي باقي الفترات E_j ولذا نستغني عن هذه الفترات الأخيرة. نكرر العملية مع نقطة أخرى x لاتنتمي إلى المجموعتين المختارتين إن وجدت مثل هذه النقاط.

(٧-٤) لتكن $E \supset F$ حيث E متراصة و F مغلقة. ولتكن G مجموعة من المجموعات المفتوحة تغطي F . المكملة $C(F)$ مفتوحة و $\{G\}$ مع $C(F)$ تغطي E . حيث إن E متراصة، يوجد مجموعة جزئية منتهية من الفترات $\{G\}$ و $C(F)$ تغطي E وكذلك F . F تبقى مغطاة حتى بعد حذف $C(F)$.

(٧-٥) البرهان مثل ما في التمرين (٧-٢).

(٧-٦) المجموعة $\{1/2, 1/4, 1/8, \ldots\}$ مغطاة بواسطة الفترات المفتوحة $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)$ $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}, \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right)$ ، .....لايوجد عدد نهائي من هذه الفترات ويغطي E_1 لأنه في هذه الحالة يوجد أصغر طرف أيسر وهو موجب. يمكن تغطية المجموعة $E_2 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ بواسطة الفترات

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ، $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ ، .... أي عدد نهائي من هذه الفترات يغطي جزءاً محدوداً من R_1 و E_2 غير محدودة.

(٧-٧) إذا وجد غطاء نهائي لـ E ، اجعل y أصغر طرف أيسـر. النقطة $y/2$ غير مغطاة. هذا لا يعارض نظرية هاين - بوريل لأن E غير مغلقة.

(٧-٨) المجموعة E مغلقة ولكنها غير محدودة.

(٧-٩، ٧-١٠) نظرية هاين - بوريل تعطينا شـروطاً كافية لإمكانية الحصول على غطاء نهائي من أي غطاء ولكن هذه الشروط ليست لازمة.

(٨-١) لنفـرض أن R_1 كامـل وأن E مجموعة غير خالية محدودة من أعلى. افرض أن x_1 حد أعلى لـ E . إذا كان $x_1 - \frac{1}{2}$ حداً أعلى لـ E كذلك فنسميه x_2; إذا كان $x_2 - \frac{1}{3}$ حداً أعلى لـ E فنسميه x_3 وهلم جرا. بما أن E غير خالية والسلسلة $\Sigma 1/n$ متبـاعـدة فإننا نصل في نهاية الأمر إلى n بحيث يكـــون $x_{n-1} - 1/n$ أول عدد من هذه الصـــورة وليس حداً علوياً لـ E . لدينا الآن فترة طولها $1/n$ طرفها الأيمن حد علوي لـ E وطرفها الأيسر ليس حداً علوياً. خذ الطرف الأيمن وسمه y_1. نصف الفترة واجعل y_2 نقطة المنتصف إذا كانت حداً علوياً لـ E وإلاَّ فاجعلها y_1. كرر هذه العملية لتحصل على متتالية كوشي $\{y_n\}$ والتي تؤول إلى أصغر حد علوي للمجموعة E .

(٨-٢) مجمـــوعـــة العنـاصر المختلفـة من s_n لها أصغـر حد علوي L . فإذا أعـطينــا $\epsilon > 0$ فإنه يوجد s_n بحيث $L - s_n < \epsilon$. وبما أن s_n تتزايد فإن $L - s_m < \epsilon$ لجميع $m \geq n$. إذن المتتالية $\{s_n\}$ تؤول إلى L .

(٨-٣) إذا كانت $\{(x_n, y_n)\}$ متتالية كوشيه في R_2 فإن $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليات كوشيه في R_1 .

(٨-٤) الأعداد النسبية في R_1 .

(٨-٥) إذا كانت $s_n \to L$ فإن كل s_n من نقطة معينة تنتمي إلى أي جوار معطى حول L . إذا لم تكن جميع s_n مساوية للنهاية L من نقطة معينة فإن كل جوار حول L يحوى واحداً من هذه العناصر يختلف عن L .

(٨-٦) إذا كانت $s_n \to L$ و $s_n \in F$ حيث F مجموعة مغلقة فإما $s_n = L$ من نقطة معينة وعليه فإن $L \in F$ أو أن L نقطه نهائية لمجموعة العناصر المختلفة من s_n وفي هذه الحالة نجد أن $L \in F$ لأن F مغلقة .

(٨-٧) يوجد أصغر حد علوي لـ E ونسميه L . يوجد نقاط x_n من E بحيث $L - x_n < \frac{1}{n}$ (قد لاتكون جميعها مختلفة). إذن L هي نهاية $\{x_n\}$. من التمرين (٨-٦) نستنتج أن $L \in E$.

(٨-٨) إذا كانت E مكونة من عدد نهائي من العناصر المختلفة فإن واحدا من هذه العناصر لابد أن يتكرر عدداً لانهائياً من المرات وهذا يعطينا متتالية جزئية متقاربة . في الحالات الأخرى، يوجد نقطة نهاية لعناصر E ونستطيع تطبيق مبدأ المتتالية الجزئية .

(٨-٩) اجعل D ترمز للمسافة هنا . إذا لم تكن G محدودة فإننا نستبدل G بتقاطع G مع جوار كبير تبعد حدودة عن جميع نقاط F بمسافة أقل من D . إذا كانت المسافة D تؤخذ من قبل نقطة في G فإن النقطة في هذه المجموعة الجزئية من G أيضا . إذن بإمكاننا افتراض أن F و G

مجمـوعـات محدودة. خذ الـنـقـاط x_n في F و y_n في G بحـيث $d(x_n, y_n) \to D$ استعمـل التمـرين (٨-٧)، خذ متتالية جزئية متقاربة من $\{x_n\}$ ومتتـالية جزئية متقـاربـة من $\{y_n\}$ وسميهـا أيضـا $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$. إذاً $x_n \to x$ و $y_n \to y$ حيث $x \in F$ و $y \in G$ فتكون F و G مغلقة. كذلك $d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$ ومـنـه نجـد $d(x, y) \leqslant D$. وبما أن $d(x, y)$ لايقل عن D فإن $d(x, y) = D$.

(٨-١٠) (أ) نعم. (ب) ليس بالضرورة، مثـلاً خذ الأعداد الصحيحة في R_1 بمسافة R_1. جوار النقطة 0 بحيث $d(0, x) < ½$ يتألف من 0 وحدها ولذا فقطره صفر.

(٨-١١) لنفرض أن أقطار E واغلاقها هي δ و Δ على الترتيب. طبعاً $\delta \leqslant \Delta$. خذ x_n و y_n في إغلاق E بحيث $d(x_n, y_n) \to \Delta$. إذا كانت x_n نقطة نهاية لـ E فإنـه يوجـد نقـطة x'_n من E في حدود $1/n$ من x_n، إذن $d(x'_n, y_n) \geqslant \Delta - 1/n$. بنفس الـطريقـة إذا كانت y_n نقـطة نهاية لـ E. (في الحـالات الأخرى نأخذ $x'_n = x_n$ و $y'_n = y_n$). بهذه الطريقة نحصل على النقاط x'_n و y'_n في E بحيث $d(x'_n, y'_n) \geqslant \Delta - 2/n$ ومن هذا نرى أن $\Delta \leqslant \delta$. إذن $\delta = \Delta$.

(٩-١) خذ المجموعة $\{x\}$ المكونة من العنصر الوحيد x. هذه المجموعة مخلخلة إذا كان إغـلاقهـا $\{x\}$ لايحـوى أي جوار، بمعنى آخر إذا كان $\{x\}$ ليس جواراً. هذا يحدث إذا كانت المجموعة من العناصر y بحيث $d(x, y) < r$ تحوى نقاطاً غير x لكل عدد موجب r وهذا ما يحدث فعلاً إذا كانت x نقطة نهاية في الفضاء.

(٩-٢) إذا اعتبرنا أي مجموعة غير خالية وتامة على أنها فضاء متري فإنها تكون من الفئة الثانية. حيث إن جميع نقاطها نقاط نهاية إذن فكل نقطة مخلخلة ولذا فأي مجموعة قابلة للعد فيها تكون من الفئة الأولى. إذن لايوجد مجموعة غير خالية وتامة وقابلة للعد في R_1.

(١٠-١) لتكن E مجموعة مغلقة ومكملتها كثيفة في كل مكان. هذه المجموعة مخلخلة إلاَّ إذا كان إغلاقها (داخل E) يحوى جواراً ما (تمرين ٦-٢). إذا احتوت E جواراً فإن مكملتها تكون منفصلة عن هذا الجوار ولذا لاتكون كثيفة في كل مكان.

(١٠-٢) لنفرض أن فترة مغلقة في R_1تساوى اتحاد مجموعة لانهائية قابلة للعد من المجموعات غير الخالية المغلقة المنفصله E_n. بواسطة نظرية بير أحد هذه المجموعات كثيفة في فترة ما وبما أنها مغلقة فهي تحتوى هذه الفترة. خذ أكبر فترة من هذا النوع. كرر هذه العملية مع مايبقى من الفترة الأصلية. نحصل على مجموعة قابلة للعد من الفترات المغلقة I_n ينتمي كل منها إلى واحد من E_n ويكون اتحادها كثيفاً في كل مكان. إذا اشتركت I_n و I_mفي نقطة فإن هذه النقطة تنتمي إلى E_n و E_m وهذا مستحيل لأن E_n مجموعات منفصلة. إذا أبعدنا النقاط الداخلية من جميع الفترات I_n فإن المجموعة المتبقية H تكون تامة. نطبق نظرية بير على H كما في المثال (ب) ونجد أن جزء المجموعة H المحتوى في فترة J ينتمى بكامله إلى إحدى E_n وكذلك جميع نقاط أطراف الفترات I_n والتي في الفترة J ولذا نجد أن هذه الفترات I_n جميعها تنتمي إلى الفترة E_n نفسها ولذا فإن H خالية.

(١١-١) يكفي أن نثبت أن مقياس $E \cap (a, b)$ يساوى صفراً لكل (a, b) لأنه بالإمكان تغطية R_1 بمجموعة قابلة للعد من هذه الفترات. غط E

بالفترات (a_n, b_n) والتي مجموع أطوالها لايتعدى $q(b - a)$. ومن ثم غط كل $E \cap (a_n, b_n)$ بنفس الطريقة. إذن E مغطاه بفترات لايزيد مجموع أطوالها الكلي عن

$$q(b_1 - a_1) + q(b_2 - a_2) + \dots = \quad q[(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots] \leqslant q^2(b - a)$$

كرر العملية ولاحظ أن $q^n \to 0$.

(١٢-١) (د) نطاق الدالة هو النقطة 0 ، (جـ) و (هـ) النطاق يساوى R_1 بكامله.

(١٢-٢) لتكن x العدد النسبي $\frac{p}{q}$. إذا كانت $m > q$ فإن $m!x$ عدد صحيح زوجي وتكون $\cos m!\pi x = 1$ ، النهاية الداخلية تساوى 1 ولذا فإن $f(x) = 1$. على العكس من ذلك، خذ x غير نسبي. في هذه الحالة $m!x$ لايكون عدداً صحيحاً أبدا و $|\cos m!\pi x| < 1$ والنهاية الداخلية تساوى 0 ومنه $f(x) = 0$.

(١٣-١) من المتراجحة المثلثية نجد أن

$$|f(x_0) - f(x)| = |d(x_0, y) - d(x, y)| \leqslant d(x_0, x) .$$

(١٣-٢) يكفي أن نثبت أن $|D(x) - D(y)| \leqslant d(x, y)$.
لاثبات ذلك، خذ أي نقطة P في E ، إذن $d(x, p) \leqslant d(x, y) + d(y, p)$ (المتراجحة المثلثية). حيث إن $D(x) \leqslant d(x, p)$ مهما كانت P في E فإننا نجد أن $D(x) \leqslant d(x, y) + d(y, p)$. بالاختيار المناسب للنقطة P نستطيع جعل $d(y, p)$ قريب بصورة اختيارية من $D(y)$. إذاً

$D(x) \leqslant d(x, y) + D(y)$. إذا بدلنا x و y فإننا نجد أن $D(y) \leqslant d(x, y) + D(x)$. إذاً

$$D(x) - D(y) \leqslant d(x, y),$$
$$D(y) - D(x) \leqslant d(x, y).$$

وهذا يعني أن $|D(x) - D(y)| \leqslant d(x, y)$.

(١٣-٣) إذا كانت الدالة ثابتة فإن صورة كل مجموعة غير خالية هي نقطة واحدة .

(١٣-٤) الصورة العكسية لجوار حول $f(x_0)$ صغيرة لدرجة تكفى لإبعاد 0 عن كونه مجموعة مفتوحة . إذا كانت x في جوار x_0 ومحتواة في هذه المجموعة المفتوحة فإن القيم $f(x)$ تنتمي إلى الجوار الأصلي حول $f(x_0)$ وهذا يعني أن القيم $f(x)$ محدودة عن 0 .

(١٣-٥) مجموعة ألاعداد الحقيقية التي قيمتها المطلقة أقل من $|f(x_0)| + 1$ تكون مفتوحة ولذا فصورتها العكسية مفتوحة . هذه الصورة العكسية غير خالية لأنها تحوى x_0 ولذا فهي تحوى جواراً حول x_0 كذلك .

(١٣-٦) نفي تعريف الاتصال يعني وجود $\epsilon > 0$ بحيث أنه لكل $\delta_n > 0$ يوجد x_n تحقق $|x_n - x_0| < \delta_n$ و $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \epsilon$ في نفس الوقت .

(١٤-١) إذا كانت $f + g$ و f دوال متصلة فإن $(f + g) - f = g$ دالة متصلة أيضا . إذا كانت f غير متصلة فإن $-f$ غير متصلة أيضا ولكن $f+(-f)$ هي الدالة الثابتة والتي قيمها تساوى 0 وهذه متصلة طبعا .

(١٤-٢) المجمـوع: خذ أي ϵ نستـطيع إيجـاد δ_1 بحيث $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ عنـدمـا $d(x, x_0) < \delta_1$ و δ_2 بحيث $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ عنـدمـا $d(x, x_0) < \delta_2$. اجعـل $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$، إذاً $|f(x) + g(x) - [f(x_0) + g(x_0)]| < \epsilon$ عندما $d(x, x_0) < \delta$.

الضرب: الـدوال f و g محدودة في جوار حول x_0، اجعـل M الحـد المشترك لقيم $|f(x)|$ و $|g(x)|$. إذاً

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| &\leqslant |[f(x) - f(x_0)]g(x)| + |f(x_0)[g(x) - g(x_0)]| \\ &\leqslant M|f(x) - f(x_0)| + M|g(x) - g(x_0)|\end{aligned}$$

والطرف الأيمن صغير إذا كانت $d(x, x_0)$ صغيرة.

القسمـة: يكفي لإثبـات أن $\frac{1}{g}$ متصلة عنـدمـا تكون g متصلة إذا كانت $g(x_0) \neq 0$ (بـاستعـمال خاصية اتصـال الضرب نجـد أن $\frac{f}{g} = f.(\frac{1}{g})$). من التمـرين (١٣-٤)، نجـد أن $|g(x)| \geqslant m > 0$ في جوار ما حول x_0. لجميع قيم x في هذا الجوار نجد أن:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|} \leqslant m^{-2}|g(x) - g(x_0)|$$

والطرف الأيمن صغير إذا كانت $d(x, x_0)$ صغيرة.

(١٤-٣) لتكن G مفتـوحة إذن C(G) مغلقة. فإذا كانت صور المجموعات المغلقة مغلقـة فإن صورة C(G) مغلقـة. وبـما أن f أحـادية فإن مكملة صورة C(G) هي صورة G وهذه المكملة مفتوحة (لأنها مكملة مجموعة مغلقة). نبرهن العكس بنفس الطريقة.

(١٤-٤) إذا كانت f لاتـأخـذ القيمـة M فإن الـدالـة g المعـرفـة كالتـالي $g(x) = 1/[M - f(x)]$ تكـون متصلة على نطاق f . إذن g محدودة، واجعـل G حدا أعلى لـ $|g(x)|$. إذاً $G \leqslant \frac{1}{M - f(x)}$. هذه المتراجحـة تقتضي أن $f(x) \leqslant M - \frac{1}{G}$ وهذا يعني أن M ليست أصغر حد علوي لقيم f .

(١٤-٥) اجعـل l و L أصغر وأكبر عددين في المدى. الدالة تأخذ هذه القيم بالطبع إذن فهي تأخذ كل قيمة في الفترة $[l, L]$ حسب خاصية القيمة المتوسطة للدوال المتصلة.

(١٤-٥ أ) إذا كانت $f(x) \equiv 0$ فلا يوجد شيء يبرهن. لنفرض أن $f(x_0) > 0$ لقيمة ما x_0. خذ $b > a$ بحـيث تكـون $f(x) < \frac{1}{2} f(x_0)$ لجميع $x \geqslant b$. إذن $\max f(x)$ على $[a, \infty)$ يساوى $\max f(x)$ على $[a, b]$.

(١٤-٥ ب) اجعل x_n أكبر قيمة تأخذ عندها f قيمتها العظمى على $[n, \infty)$ (هذه القيمـة الكـبرى موجودة لأن $f(x) \to 0$ والمجموعة حيث $f(x) = f(x_n)$ متراصة) إذن $x_{n+1} \geqslant x_n$ و $x_n \to \infty$.

(١٤-٦، ١٤-٧) مدى f هو نفسـه مدى مقصور f على $[0, P]$. وهذه الدالة الأخيرة متصلة على مجموعة متراصة.

(١٤-٨)

$$\int_x^{x+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt - \int_0^x f(t)dt + \int_p^{p+x} f(t)dt$$

$$= \int_0^p f(t)dt - \int_0^x f(t)dt + \int_0^x f(t+p)dt$$

$$= \int_0^p f(t)dt$$

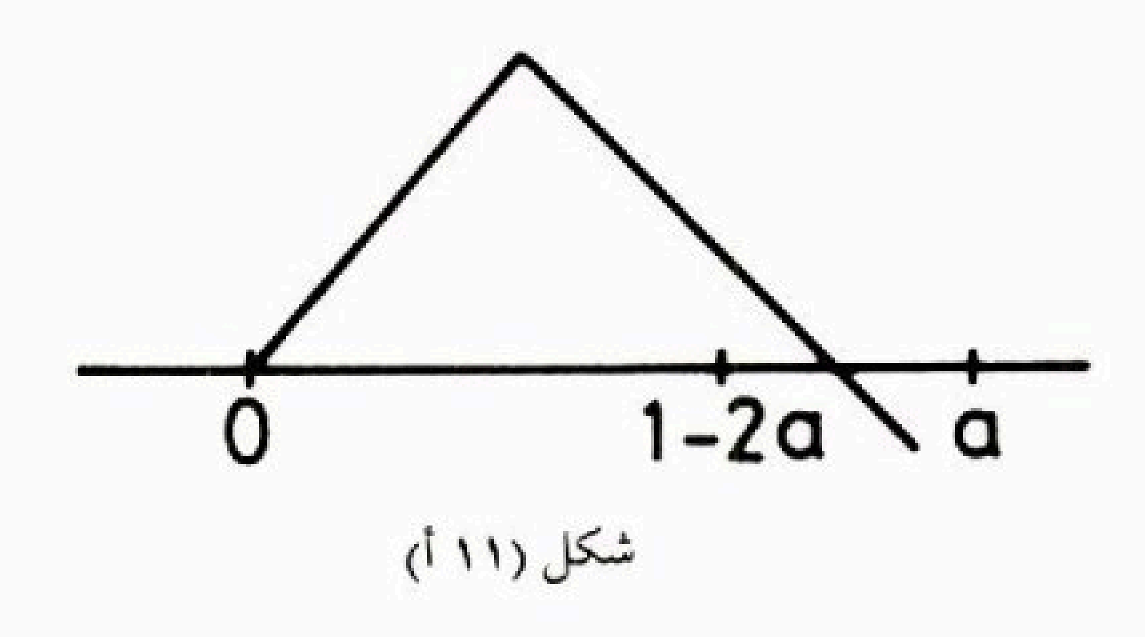
لأن $f(t + p) = f(t)$. وهذه طريقة أخرى بديلة

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+p} f(t)dt = f(x+p) - f(x) = 0$$

(١٤-٩)

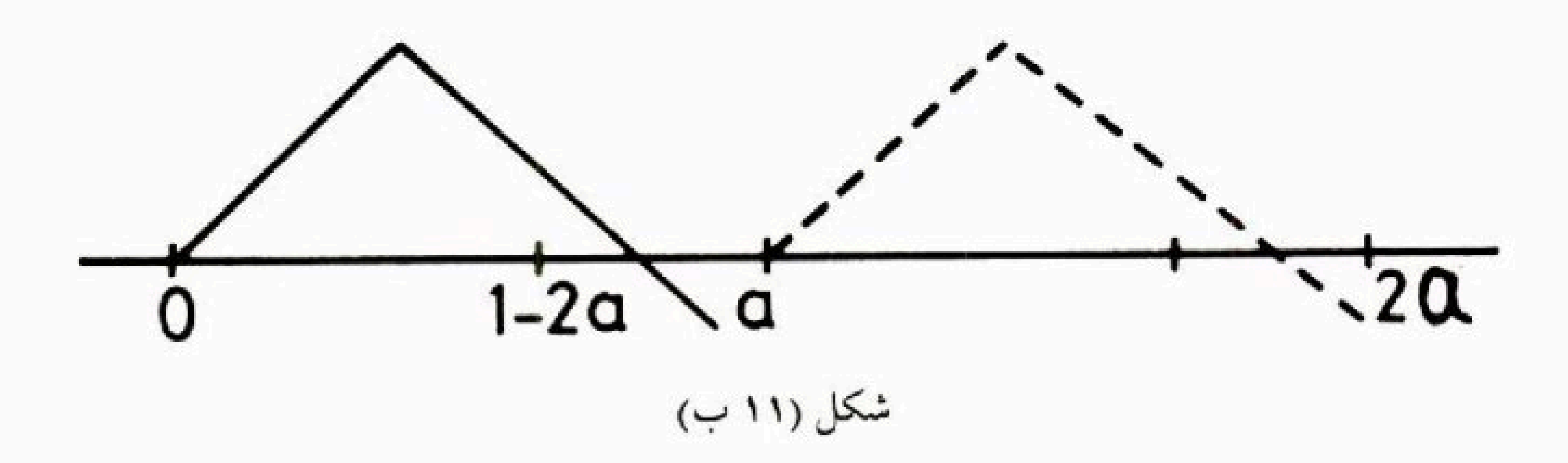
$$\int_{0}^{p} [f(x+a) - 2f(x) + f(x-a)]dx = 0$$

(١٤-١٠) نشـــير إلى خطوات طريقـــة البنـــاء في حالـــة $1/3 < a < 1/2$. (كـما في شكل ١١ أ) .



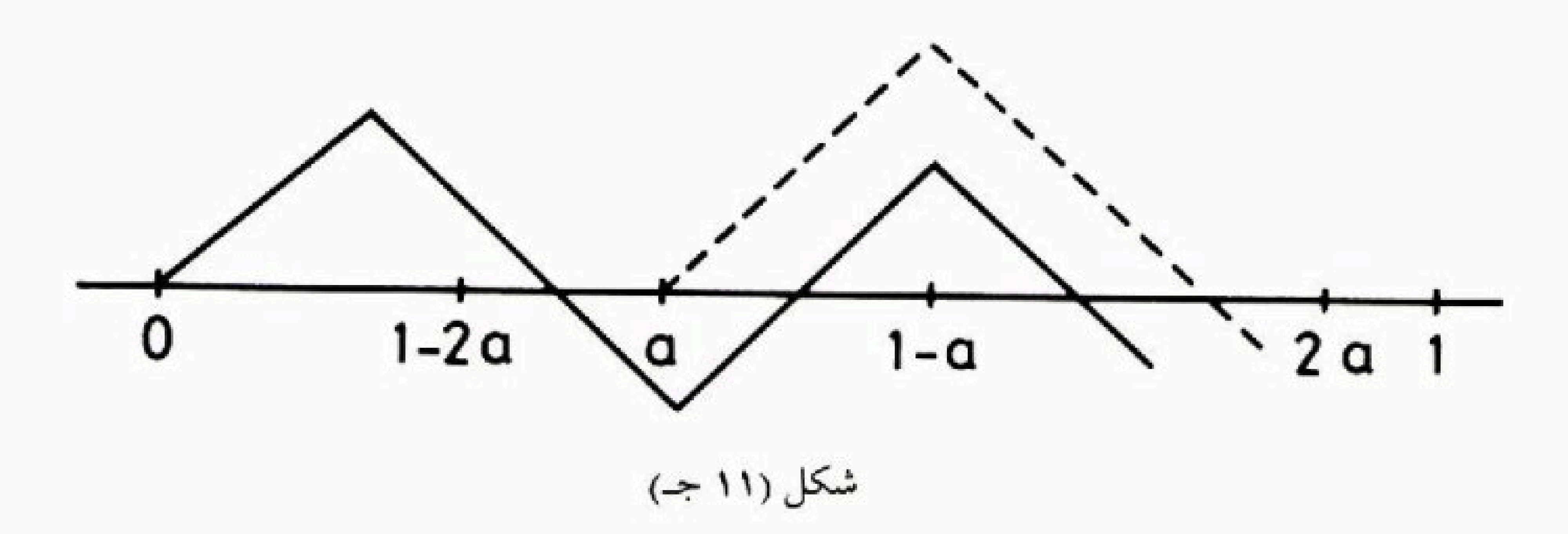
شكل (١١ أ)

من الواضح أنه ليس لهذا الجزء من المنحنى وتر أفقي بطول a .



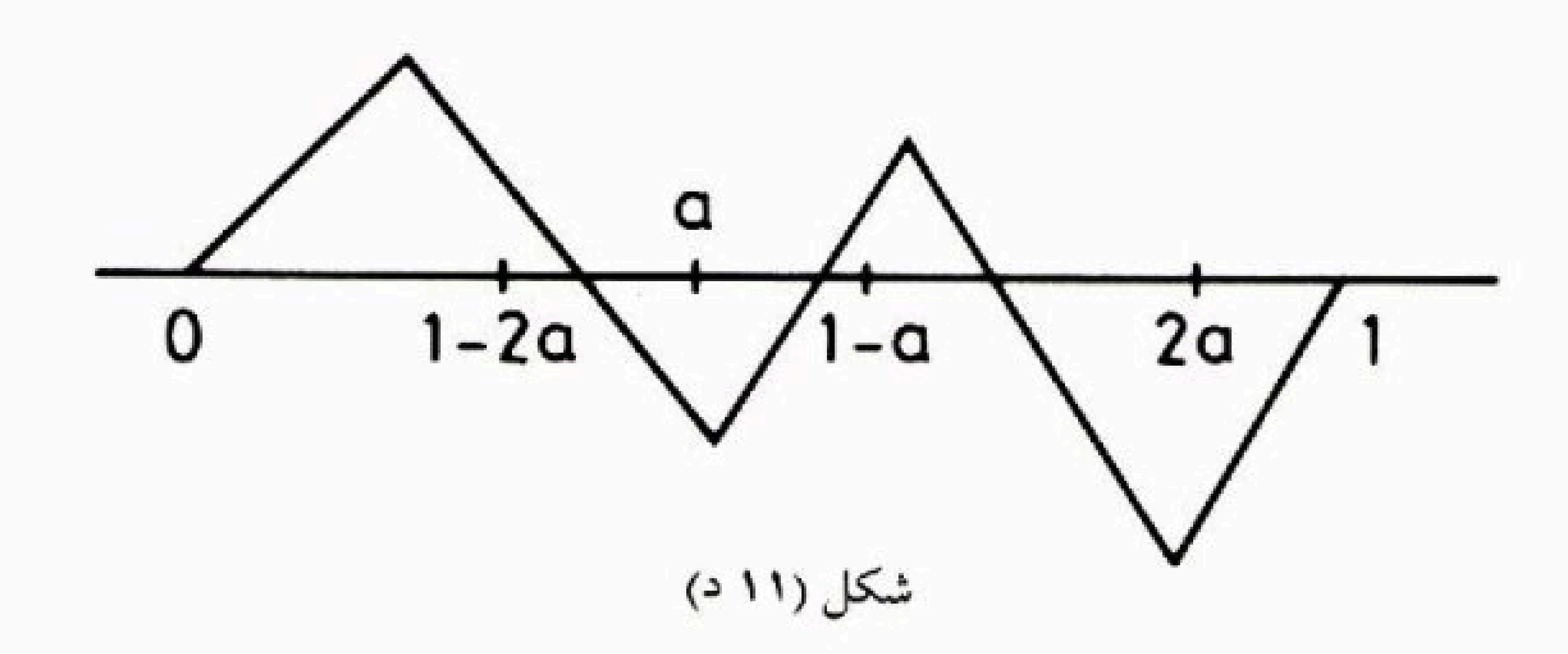
شكل (١١ ب)

الوتر الأفقي بطول a الذى طرفه الأيسر يقع على المنحنى المتصل يصل فقط إلى المنحنى المتقطع والذى هو عباره عن إزاحة للمنحنى المتصل إلى اليمين a من الوحدات. بالتالي إذا وسعنا المنحنى المتصل بحيث يقع تحت المنحنى المنقطع فإنه لايوجد وتر أفقي بطول a طرفه الأيمن عند أي نقطة إحداثيها السيني لايزيد عن $2a$. كما في شكل (١١ ب) .



شكل (١١ جـ)

بما أن $a > 1/3$ و $1 - a < 2a$ فإنه إذا وصلنا طرف المنحنى المتصل إلى 1 بحيث يكون تحت المحور السيني فإنه لايوجد أي وتر أفقي بطول a . كما في شكل (١١ جـ).



شكل (١١ د)

كان مثــال ليفي Levy هو الــدالــة $f(x) = \sin^2(\pi x/a) - x \sin^2(\pi/a)$ حيث $a \neq 1/n$. هالموس Halmos أشار إلى المؤلف أنه بطريقة مشابهة الدالة $f(x) = g(x) - x$ تعطي مثالاً آخر عندما تكون g مستمرة ودورية دورتها a . بحيث $g(0) = 0$ و $g(1) = 1$. (شكل ١١ د).

(١٤-١١) إذا كانت $a = 1/2$ فإن فرضيتنا تعني أن للدالة f وترا أفقياً بطول $1/2$. إذا كانت $a = 1/3$ فإن f لها وتر أفقي إما بطول $1/3$ أو بطول $1/3 = 1/2 . 2/3$ ، وهكذا.

(١٤-١٢) لنعتــبر الـدالـة g بحيث $g(x) = f(x) - x$ فنحصـل على $g(0) = f(0) \geqslant 0$ و $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ وأن g مستمرة. لذا $g(x) = 0$ عند نقطة ما.

(١٤-١٣) هذه حالة نهائية للنظرية المتعلقة بتنصيف مساحتين آنيا (على افتراض أنها أثبتت للمساحات غير المحدبه). لإثبات ذلك مباشـرة: خذ نقطة P على المنحنى وابحث عن نقـطة أخرى Q بحيث يكون القوسان PQ متساويين. ليكن f(P) الجزء من المساحة الذى بداخل المنحنى والواقع إلى يمـين PQ فإن f دالة مستمرة نطاقها نقاط المنحنى وذلك لأن أي تغـييراً طفيفــاً في P ينتــج عنـــه تغيير طفيف في Q . إذا بدأت P من P_0 وتبعت المنحنى فإن اليمين واليسار يكونان قد استبدلا بعضهما البعض عندما تصل P إلى Q_0 لذا فإن f(P) إذا لم يكن أصلاً نصف المساحة فإنه الآن في نصف المســاحـة الآخـر ولـذا لابد وأن يكون مساوياً لنصف المساحة عند موضع معين سابق للنقطة P .

(١٥-١) الأعداد L_n هي عناصر من متتالية غير تزايدية. بما أنها محدودة فإن لها نهاية L . إذا كانت n كبـيرة لدرجة أن $L_n < L + \epsilon$ فإن $S_k < L + \epsilon$ لكــل $k \geqslant n$. كذلك إذا كانت n كبيرة لدرجة أن $L_n > L - \epsilon$ فإنه توجد k ، $k > n$ بحيث $S_k > L - \epsilon$. بأخذ n بشكل تزايدى نحصل على عدد لانهائي من S_k بحيث تتحقق الخاصية الثانية. لذا فإن للنهاية L الخواص المعرفة للكمية $\limsup S_n$.

(١٥-٢) $l = \liminf S_n$ ، إذا كان ϵ أي عدد موجب معطى فإن $S_n \geqslant l - \epsilon$ إذا كانت n كبيرة بقدر كاف، بالإضافة إلى ذلك يوجد عدد لانهائي S_n يحقــق $S_n \leqslant l + \epsilon$. إذا كانــت $\{S_n\}$ غير محدودة من أسـفـــل فإن $\liminf S_n = -\infty$ وإذا لم تكن l موجودة نكتب $\liminf S_n = +\infty$. في الأمثلة l تساوى (أ) -1 ، (ب) $+\infty$ ، (جـ) $-\infty$ ، (د) 0 ، (هـ) 0 .

(١٥-٣) لدينا $S_n \leqslant \frac{1}{2}\epsilon + \limsup S_n$ عندما $n > n_1$ ، و $t_n \leqslant \frac{1}{2}\epsilon + \limsup t_n$ عنـدمـا $n > n_2$ ، بالتالي فإن $S_n + t_n \leqslant \epsilon + \limsup S_n + \limsup t_n$

عنـــدمـــا $n > \max(n_1, n_2)$ لذا $\limsup (S_n + t_n)$ لايمـكن أن يزيد عن $\limsup S_n + \limsup t_n$. إذا كان $\lim t_n = T$ نحـــصـــل على $S_n \geqslant \limsup S_n - \frac{1}{2}\epsilon$ لعـدد لانهائي من الأعـداد n و $t_n \geqslant T - \frac{1}{2}\epsilon$ لكـل عدد كبـير n لذا $S_n + t_n \geqslant \limsup S_n + T - \epsilon$ لعدد لانهائي من n .

(١٥-٤) إذا كان $\epsilon > 0$ نحـــصـــل على $S_n \leqslant l + \epsilon$ عنـــدمـــا $n > n_1$ وعـــلى $S_n \geqslant L - \epsilon$ عـنـــدمـا $n > n_2$ لـذا فـإن $|S_n - L| < \epsilon$ عـنـــدمـا $n > \max(n_1, n_2)$.

(١٦-١ أ) $S_n \to 0$ في C لأنـه إذا كان ϵ عدداً حقيقياً موجباً فإن $|S_n(x)| < \epsilon$ إذا كـان $1 - \epsilon < x \leqslant 1$ مـسـتـقـلاً عـن n لأنـه $|x^n| \leqslant 1$. إذا $0 \leqslant x \leqslant 1 - \epsilon$ نحصـــل على $|S_n(x)| \leqslant (1 - \epsilon)^n$. لذا $\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |S_n(x)|$ لايزيد عن أكـبر العـددين ϵ و $(1 - \epsilon)^n$ ولكن العـدد الأخير هو الأصغر إذا كانت n كبيرة بقدر كاف.

(١٦-١ ب) $\{S_n\}$ غير متـــقـــاربـــة في C لأنـــه $S_n(x) \to 0$ لكـــل x لكـــن $S_n(1 - \frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e}$ و $\max |S_n(x)|$ لاينقص عن $S_n(1 - \frac{1}{n})$.

(١٦-٢) $\sup_{X \in E} |S_n(x)| \leqslant M$ عن طريق الـــتـــقـــارب المـــحـــدود ولـــذا $\lim_{n \to \infty} S_n(x) \leqslant M$ ، $X \in E$.

(١٧-١) السلسلة لاتتغـير عنـد مفاضلتها حداً حداً لذا مجموعها S(x) يحقق $S'(x) = S(x)$ وبالتالي $S(x) = Ce^x$ حيث $C = f(0) + f'(0) + \ldots$.

(١٧-١ أ) بتـطبيق اختبـار فيرشتراس (صفحه ٨٩) حيث E مجموعة الأعداد الصحيحـة فإن المتتـالية، التي حدهـا الذى رتبته K يساوى $\sum_{n=1}^{p(k)} f_n(k)$ ، تكون متقاربة بانتظام . هذا يقتضي أن

$$\left|\sum_{n=1}^{p(k)} f_n(k) - \sum_{n=1}^{p(k)} L_n\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} [f_n(k) - L_n]\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{p(k)} f_n(k)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{p(k)} L_n\right|$$

بالإمكان جعل كل من المجموعين الأخيرين أقل من ϵ بأخذ N كبيرة (وذلك عن طريق استخدام التقارب المنتظم). ثبت N ودع $k \to \infty$ في المجموع النهائي .

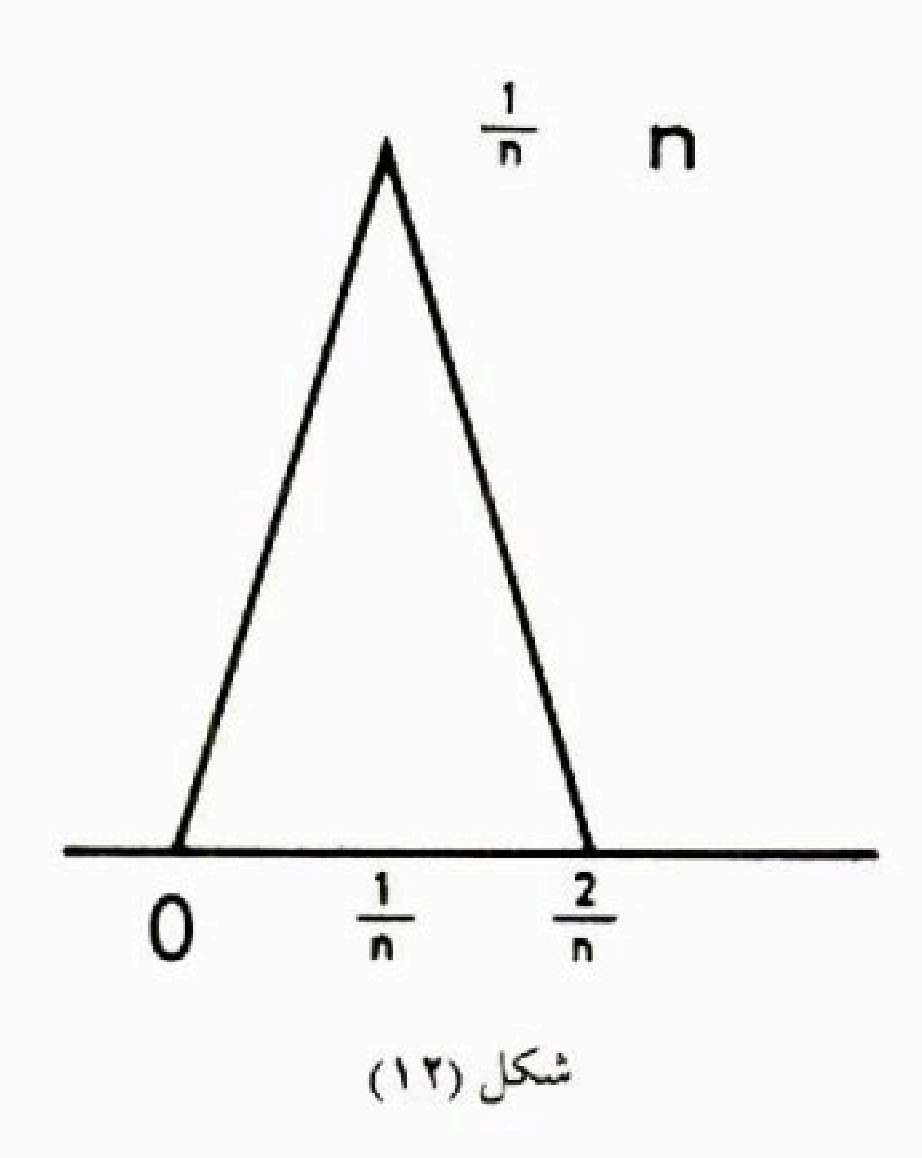
(١٧-١ ب) لكل x ،

$$(1 + x/k)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n}\left(\frac{x}{k}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right) \frac{x^n}{n!}$$

$$M_n = |X|^n/n!$$

(١٧-٢) على سبيل المثال، $f_n(x) = 0$ فيما عدا $0 < x < 2/n$ و $f(1/n) = n$ و $f(x)$ خطية في $(0, 1/n)$ وفي $(1/n, 2/n)$. (كما في شكل ١٢) .



شكل (١٢)

(١٨-١) على سبيل المثال، $f(x, y) = \sin 2\theta$ حيث $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$.

(٢٠-١) بما أن $\int_{R+y}^{x+y+R} + \int_{R}^{R+y} = \int_{R}^{x+y+R}$ نحصل على $\phi(x + y) = \phi(y) + \phi(x)$.
لكن ϕ هي نهاية دوال مستمرة لذا فهي على الصيغة $\phi(x) = ax$.

(٢١-١) إذا كان $f'_+(x)$ موجوداً (محدوداً) فإن $\lim_{h\to 0^+}[f(x + h) - f(x)]/h$ محدود، لذا $\lim_{h\to 0^+}[f(x + h) - f(x)] = 0$. بالنسبة للجملة المتضمنة f' احذف جميع الرموز السفلية والعلوية وكذلك إشارة + في الجملة السابقة أعلاه.

(٢١-٢) إذا كان $f(x) = 0$ لكل $x < 0$ وإذا كان $f(x) = 1$ لكل $x > 0$ و $f(0) = \frac{1}{2}$ نحصل على $f'(0) = +\infty$.

(٢١-٣) $\in(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a) - f'(a) \to 0$.

(٢١-٤) الكمية $g(x + h) - g(x)$ ربما تكون صفراً لبعض قيم h القريبة بشكل اختياري من الصفر. من تمرين (٢١-٣) نحصل على:

$$\phi(x + h) - \phi(x) = f(g(x + h)) - f(g(x))$$
$$= [g(x + h) - g(x)][f'(g(x)) + \varepsilon(g(x))]$$

بما أن $g'(b)$ موجود فإن g دالة مستمرة عند b ، بالتالي $g(x) \to g(b)$ عندما $x \to a$ و $\in(g(x)) \to 0$. اقسم على h ودع $h \to 0$.

(٢١-٥) إذا كان $f_+(x) > 0$ فإن $\liminf_{h\to 0^+}[f(x + h) - f(x)]/h = \delta > 0$ ، لذا لكل الأعداد الموجبة الصغيرة بقدر كاف $f(x + h) - f(x) \geqslant \frac{1}{2} h\delta$.

(٢١-٦) لكـل $h > 0$ نحصل على $f(x + h) - f(x) \leqslant 0$ ولذا $f^{+}(x) \leqslant 0$ ، لكل $h < 0$ نحصـــل على $f(x + h) - f(x) \leqslant 0$ و $[f(x + h) - f(x)]/h \geqslant 0$ ولذا $f_{-}(x) \geqslant 0$.

(٢١-٧) افـرض أن $f'(a) < y < f'(b)$ وطبق الجملة المـذكـورة في التمرين على الدالة g المعرفة بـ $g(x) = f(x) - yx$.

(٢١-٨) لتكن $g(x) = f(x + a) - f(x) - af'(x)$ ولتكن C نقـطة حيث f تحصـل على قيمتها العظمى . إذاً $f'(c) = 0$ ولذا $g(c) = f(c + a) - f(c)$. بما أن $f(c + a)$ لايزيد عن $f(c)$ (القيمة العظمى لـ f) فلا بد وأن يكون $g(c) \leqslant 0$. لتكن d نقطة حيث f تحصل على قيمتها الصغرى، فإنه بنفس الطريقة تحصـــل على $g(d) \geqslant 0$. بما أن g هي مشـــتـــقـــة (لأن الـــدالـــة المستمـرة f هي تفـاضل تكاملها) فإن g لها خاصية القيمة الوسطى ولذا $g(x) = 0$ عند نقطة ما x .

(٢١-٩) ليكن $0 < x < 1$ فإن $g(x) = \int_{f(x)}^{f(1)} h(t)dt$ غير محدود عندما $x \to 0 +$ لأن $f(0+) = 0$. نظرية القيمة المتوسطة تقتضي

$$g(1) - g(x) = (1 - x)g'(c) = -(1 - x)hf(c)f'(c), 0 < x < c$$

والـطرف الأيسر غير محدود عـنـدمـا $x \to 0 +$. هذا الإثبـات يتطلب فرضيات أقل من الإثبات الذى يعتمد على تبديل المتغير :

$$\int_0^1 hf(x)f'(x)dx = \int_0^{f(1)} h(t)dt = +\infty$$

المكامل إشارته ثابتة ولذا يكون غير محدود .

(٢١-١٠) $f(x) = 1$ لكل $x < 0$ و $f(x) = 0$ لكل $x \geqslant 0$.

(٢١-١١) نفترض ضمنياً أن $f'(x)$ موجود لجميع قيم x في جوار للنقطة y $(x \neq y)$. نظرية القيمة المتوسطة تؤدى إلى $[f(x) - f(y)]/(x - y) = f'(t)$ حيث t بين x و y ، الطرف الأيمن قريب بالدرجة التي نرغبها من $\lim_{x \to y} f'(x)$ إذا كانت x قريبة بقدر كاف من y ، ولذا كذلك الطرف الأيسر. الجملة الأخيرة تعني أن $f'(y)$ موجود ويساوى $\lim_{x \to y} f'(x)$.

(٢٢-١) لتكن الفترة هي $[a, b]$: لذا $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ عندما $a \leqslant x \leqslant b$.

(٢٢-٢) لتكن y نقطة داخلية في النطاق ولتكن $\{x_n\}$ متتالية تزايدية نهايتها y ، فإن $\{f(x_n)\}$ متتالية تزايدية محدودة لها نهاية L (انظر تمرين ٨-٢). إذا كانت $x_n < x < y$ نستطيع أن نجد x_m بحيث $x < x_m < y$ وبالتالي $f(x_n) \leqslant f(x) \leqslant f(x_m) \leqslant L$. بما أن $f(x_n) \to L$ فإن $f(x) \to L$.

(٢٢-٣) إذا كان $f_n(x) \to f(x)$ لكل x و $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ عندما $x \leqslant y$ فإن $f(x) \leqslant f(y)$ عندما $x \leqslant y$. الجملةلاتستثني احتمال كون بعض الدوال f_n تزايدية والبعض الآخر تناقصية. إذا كانت هذه هي الحالة فإن عددا نهائياً من الدوال f_n المتميزة لن يسبب أي عائق. إذا وجد عدد لانهائي من النوعين فإن f لابد وأن تكون غير تناقصية وأيضاً غير تزايدية وبالتالي تصبح ثابتة.

(٢٢-٤) لتكن للدالة f قفزات بمقدار $1/n(n + 1)$ عند النقاط $1/n$ و $f(0) = 0$. إذا كان $(m + 1)^{-1} < h < m^{-1}$ فإن $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{m+1}$ وبالتالي $f'_+(0) = 1$.



